مسائل پایه‌ای با جواب

۶-۱ یک سیستم LTI زمان- پیوسته را با پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\sphericalangle H(j\omega)}$ و پاسخ ضربهٔ حقیقی $h(t)$ در نظر بگیرید. فرض کنید که ورودی $x(t) = \cos(\omega_\circ t + \phi_\circ)$ را به این سیستم اعمال کنیم. می‌توان نشان داد که خروجی حاصل به صورت زیر است:

$$y(t) = Ax(t - t_\circ),$$

که درآن A عددی حقیقی و نامنفی بوده و نشان دهندهٔ ضریب تغییر مقیاس دامنه است و $t_\circ$ یک تأخیر زمانی است.

(الف) A را برحسب $|H(j\omega_\circ)|$ بیان کنید.

(ب) $t_\circ$ را برحسب $\sphericalangle H(j\omega_\circ)$ بیان کنید.

۶-۲ یک سیستم LTI زمان- گسسته را با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|e^{j\sphericalangle H(e^{j\omega})}$ و پاسخ ضربهٔ حقیقی $h[n]$ در نظر بگیرید. فرض کنید که ورودی $x[n] = \sin(\omega_\circ n + \phi_\circ)$ را به ایـن سیستم اعمال کنیم. می‌توان نشان داد که خروجی حاصل به صورت زیر است:

$$y[n] = |H(e^{j\omega_\circ})|x[n-n_\circ],$$

به شرطی که $\sphericalangle H(e^{j\omega_\circ})$ و $\omega_\circ$ به طریق خاصی به هم مرتبط باشند. این رابطه را تعیین کنید.

۶-۳ پاسخ فرکانسی زیر را برای یک سیستم LTI علّی و پایدار در نظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \frac{۱ - j\omega}{۱ + j\omega}.$$

(الف) نشان دهید که $|H(j\omega)| = A$ است و مقدار A را تعیین کنید.

(ب) تعیین کنید که کدام یک از عبارتهای زیر در مورد $\tau(\omega)$، تأخیر گروه سیستم، درست است. (توجه: $\tau(\omega) = -d(\sphericalangle H(j\omega))/d\omega$، که درآن $\sphericalangle H(j\omega)$ به صورتی بیان شده است که شامل هیچگونه ناپیوستگی نیست).

۱- برای $\omega > ۰$، $\tau(\omega) = ۰$ است.

۲- برای $\omega > ۰$، $\tau(\omega) > ۰$ است.

۳- برای $\omega > ۰$، $\tau(\omega) < ۰$ است.

۶-۴ یک سیستم LTI زمان- گسسته را با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ و پاسخ ضربهٔ حقیقی $h[n]$ در نظر بگیرید. تابع تأخیر گروه برای چنین سیستمی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\sphericalangle H(e^{j\omega}),$$

که درآن $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ هیچگونه ناپیوستگی ندارد. فرض کنید که برای این سیستم داشته باشیم:

$$|H(e^{j\pi/۲})| = ۲\,,\ \sphericalangle H(e^{j۰}) = ۰,\quad \tau\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۲.$$

برای هر یک از ورودیهای زیر، خروجی سیستم را تعیین کنید:

(الف) $\cos(\frac{\pi}{2} n)$ (ب) $\sin(\frac{7\pi}{2}n + \frac{\pi}{4})$

۶-۵ یک فیلتر میان گذرایده‌آل زمان- پیوسته را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن برابر است با:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \le |\omega| \le 3\omega_c \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

(الف) اگر $h(t)$ پاسخ ضربهٔ این فیلتر باشد، تابع $g(t)$ را چنان تعیین کنید که:

$$h(t) = \left(\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}\right) g(t).$$

(ب) وقتی که ω_c افزایش یابد، پاسخ ضربهٔ این فیلتر حول مبدأ بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟

۶-۶ یک فیلتر بالا گذر ایده‌آل زمان-گسسته را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر مشخص شده است:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \pi - \omega_c \le |\omega| \le \pi \\ 0, & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}.$$

(الف) اگر $h[n]$ پاسخ ضربهٔ این فیلتر باشد، تابع $g[n]$ را چنان تعیین کنید که:

$$h[n] = \left(\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\right) g[n].$$

(ب) وقتی که ω_cافزایش یابد، پاسخ ضربهٔ این فیلتر حول مبدأ بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟

۶-۷ یک فیلتر پایین‌گذر زمان- پیوسته با این مشخصات طراحی شده است: فرکانس لبهٔ باند عبور ۱,۰۰۰ Hz ، فرکانس لبهٔ باند قطع ۱,۲۰۰ Hz ، ریپل باند عبور ۰٫۱ ، و ریپل باند قطع ۰٫۰۵ . فرض کنید پاسخ ضربهٔ این فیلتر پایین‌گذر با $h(t)$ نشان داده شود. می‌خواهیم این فیلتر را به یک فیلتر میان‌گذر با پاسخ ضربهٔ زیر تبدیل کنیم:

$$g(t) = 2h(t)\cos(4{,}000\,\pi t)$$

با فرض این که $|H(j\omega)|$ برای $|\omega| > 4{,}000\,\pi$ قابل صرف‌نظر باشد، به پرسشهای زیر جواب دهید:

(الف) اگر ریپل باند عبور برای فیلتر میان‌گذر محدود به ۰٫۱ باشد، دو فرکانس لبهٔ باند عبور مربوط به فیلتر میان‌گذر برابر چیست؟

(ب) اگر ریپل باند قطع برای فیلتر میان‌گذر محدود به ۰٫۰۵ باشد، دو فرکانس لبهٔ باند قطع مربوط به فیلتر میان‌گذر برابر چیست؟

۶-۸ یک فیلتر پایین‌گذر غیرایده‌آل علّی با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ طراحی شده است. معادلهٔ تفاضلی‌ای

که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ این فیلتر را به هم مرتبط می‌سازد به صورت زیر مشخص شده است:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$

همچنین اندازهٔ پاسخ فرکانسی فیلتر در مشخصات زیر صدق می‌کند:

فرکانس لبهٔ باند عبور $= \omega_p$،

تولرانس باند عبور $= \delta_p$،

فرکانس لبهٔ باند قطع $= \omega_s$،

تولرانس باند قطع $= \delta_s$،

حال یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که ورودی و خروجی آن با معادلهٔ تفاضلی زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} (-1)^k b_k x[n-k].$$

نشان دهید که این فیلتر دارای باند عبوری با تولرانس δ_p است و محل باند عبور متناظر را مشخص کنید.

۶-۹ یک سیستم LTI علّی و پایدار زمان-پیوسته را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t)$$

مقدار نهایی $s(\infty)$ برای پاسخ پله $s(t)$ این فیلتر برابر چیست؟ همچنین مقدار t_0 را چنان تعیین کنید که برای آن:

$$s(t_0) = s(\infty)\left[1 - \frac{1}{e^2}\right].$$

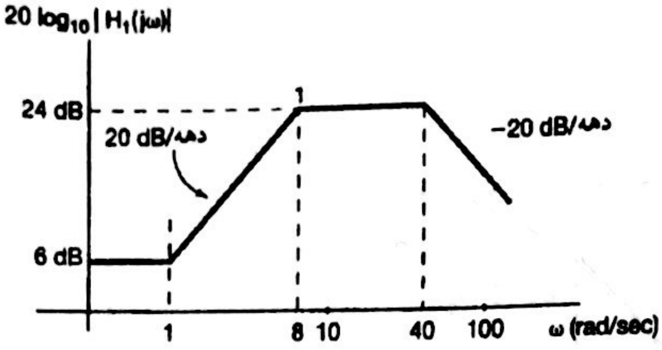
۶-۱۰ برای هر یک از سیستم‌های مرتبهٔ اولی که پاسخ فرکانسی آنها به صورت زیر است، تقریب با خطوط مستقیم از نمودار اندازهٔ بودی را مشخص کنید:

(الف) $40\left(\frac{j\omega + 0.1}{j\omega + 40}\right)$ (ب) $0.04\left(\frac{j\omega + 50}{j\omega + 0.2}\right)$

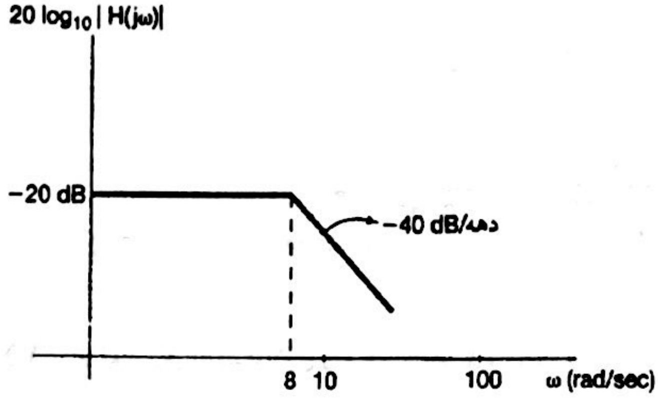
۶-۱۱ برای هر یک از سیستم‌های مرتبهٔ دومی که پاسخ فرکانسی آنها به صورت زیر است، تقریب با خطوط مستقیم از نمودار اندازهٔ بودی را مشخص کنید:

(الف) $\frac{250}{(j\omega)^2 + 50.5\, j\omega + 25}$ (ب) $0.02\,\frac{j\omega + 50}{(j\omega)^2 + 0.2\, j\omega + 1}$

۶-۱۲ سیستم LTI زمان-پیوستهٔ S با پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ از اتصال متوالی دو سیستم LTI زمان-پیوسته با پاسخهای فرکانسی به ترتیب برابر $H_1(j\omega)$ و $H_2(j\omega)$ ساخته شده است. شکلهای م۶-۱۲ (الف) و م۶-۱۲ (ب) به ترتیب تقریبهای با خطوط مستقیم از نمودارهای اندازهٔ بودی را برای $H_1(j\omega)$ و $H(j\omega)$ نشان می‌دهند. $H_2(j\omega)$ را مشخص کنید.



(الف)



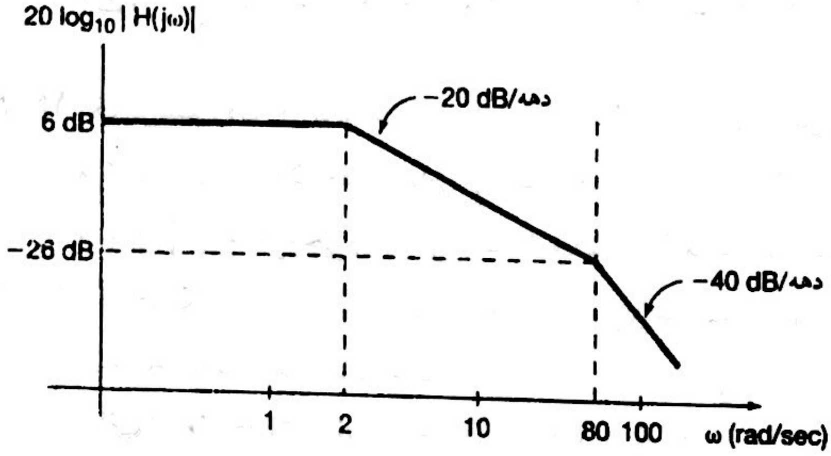
(ب)

شکل م۶-۱۲

۶-۱۳ تقریب با خطوط مستقیم از نمودار اندازهٔ بودی برای سیستم LTI زمان-پیوستهٔ مرتبهٔ دوم S در شکل م۶-۱۳ نشان داده شده است. S را می‌توان هم به صورت اتصال متوالی دو سیستم مرتبهٔ اول S_1 و S_2 و هم به صورت اتصال موازی دو سیستم مرتبهٔ اول S_3 و S_4 ساخت. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) پاسخهای فرکانسی S_1 و S_2 را می‌توان به طور یکتا تعیین کرد.

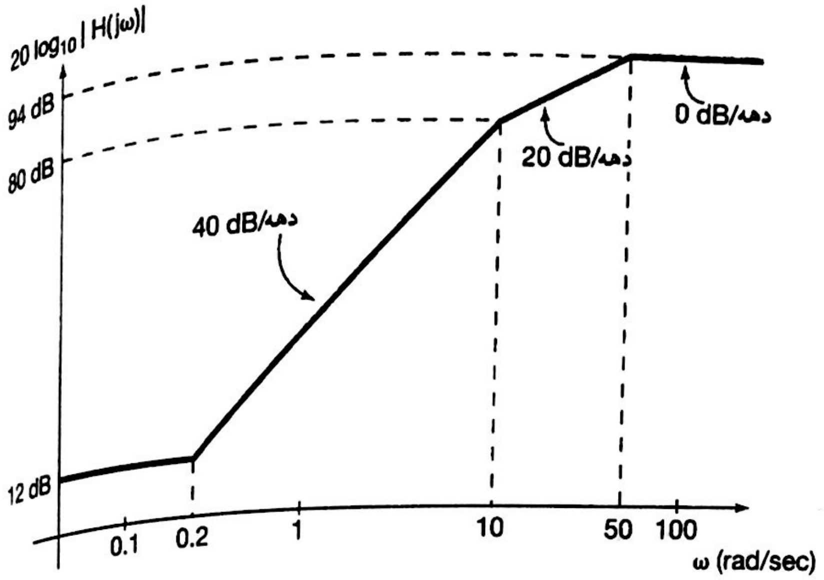
(ب) پاسخهای فرکانسی S_3 و S_4 را می‌توان به طور یکتا تعیین کرد.



شکل م۶-۱۳

۶-۱۴ تقریب با خطوط مستقیم از نمودار اندازهٔ بودی برای سیستم LTI زمان-پیوسته علّی و پایدار S در

شکل م۶-۱۴ نشان داده شده است. پاسخ فرکانسی سیستمی را که معکوس S است، مشخص کنید.



شکل م۶-۱٤

۶-۱۵ برای هر یک از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم زیر برای سیستم‌های LTI علّی و پایدار، تعیین کنید که آیا پاسخ ضربهٔ متناظر میرای ضعیف، میرای شدید، یا میرای بحرانی است:

(الف)
$$\frac{d^{2}y(t)}{dt^{2}} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = x(t)$$

(ب)
$$5\frac{d^{2}y(t)}{dt^{2}} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t)$$

(پ)
$$\frac{d^{2}y(t)}{dt^{2}} + 20\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

(ت)
$$5\frac{d^{2}y(t)}{dt^{2}} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 7x(t) + \frac{1}{3}\frac{dx(t)}{dt}$$

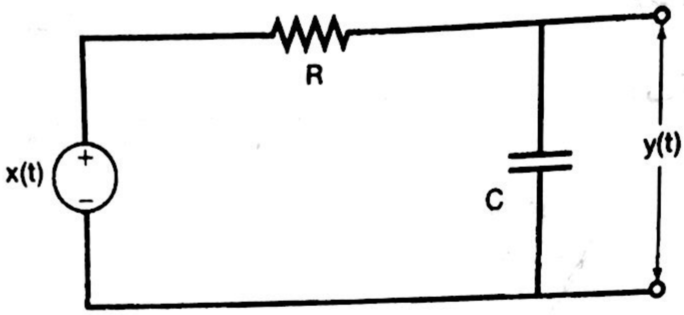
۶-۱۶ یک سیستم LTI زمان‌ـگسستهٔ علّی و پایدار مرتبهٔ اول خاصی دارای پاسخ پله‌ای است که فراجهش ماکزیمم آن برابر ۵۰٪ مقدار نهایی آن است. اگر مقدار نهایی برابر ۱ باشد، معادلهٔ تفاضلی‌ای را که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ این فیلتر را به هم مرتبط می‌سازد، تعیین کنید.

۶-۱۷ برای هر یک از معادلات تفاضلی مرتبهٔ دوم زیر برای سیستم‌های LTI علّی و پایدار، تعیین کنید که آیا پاسخ پلهٔ سیستم نوسانی است یا خیر:

(الف)
$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

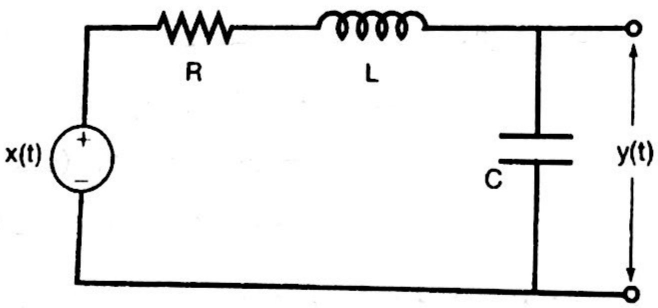
(ب)
$$y[n] - y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$$

۶-۱۸ سیستم LTI زمان- پیوسته‌ای راکه به صورت مدار RC نشان داده شده در شکل م۶-۱۸ پیاده‌سازی شده است، در نظر بگیرید. منبع ولتاژ $x(t)$ به عنوان ورودی این سیستم در نظر گرفته می‌شود. ولتاژ $y(t)$ دو سر خازن به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود. آیا ممکن است که پاسخ پلهٔ این سیستم دارای رفتار نوسانی باشد؟



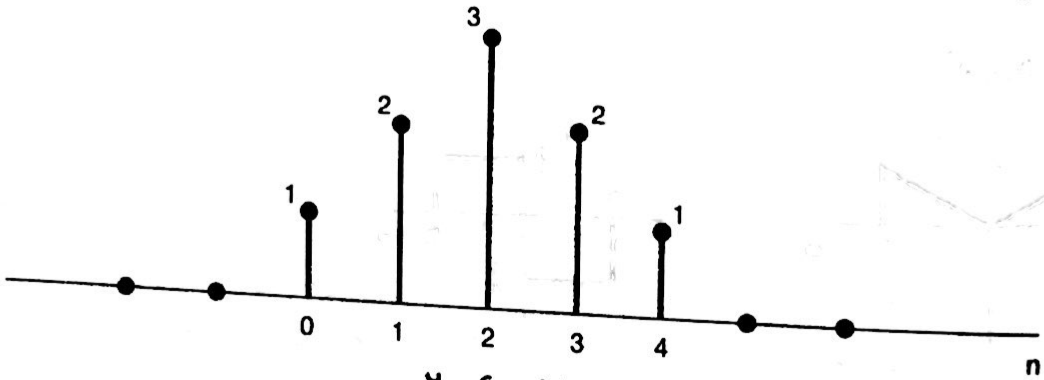
شکل م۶-۱۸

۶-۱۹ سیستم LTI زمان- پیوسته‌ای راکه به صورت مدار RLC نشان داده شده در شکل م۶-۱۹ پیاده‌سازی شده است، در نظر بگیرید. منبع ولتاژ $x(t)$ به عنوان ورودی این سیستم در نظر گرفته می‌شود. ولتاژ $y(t)$ دو سر خازن به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود. R، L، و C چگونه باید به هم مرتبط باشند تا هیچ نوسانی در پاسخ پله نباشد؟



شکل م۶-۱۹

۶-۲۰ یک فیلتر غیربازگشتی با پاسخ ضربهٔ نشان داده شده در شکل م۶-۲۰ را در نظر بگیرید. برای این فیلتر، تأخیر گروه به صورت تابعی از فرکانس برابر چیست؟



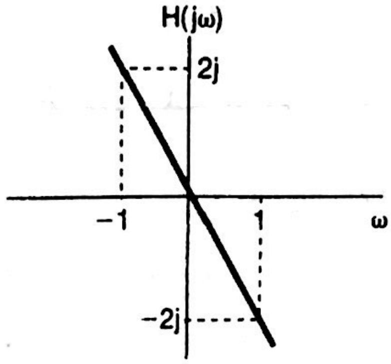
شکل م۶-۲۰

مسائل پایه‌ای

۶-۲۱ یک فیلتر LTI علّی دارای پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ نشان داده شده در شکل م۵-۲۱ است. برای هر یک از سیگنال‌های ورودی داده شده در زیر، سیگنال فیلتر شدهٔ خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

(الف) $x(t) = e^{jt}$ **(ب)** $x(t) = (\sin \omega_{\circ} t)u(t)$

(پ) $X(j\omega) = \dfrac{۱}{(j\omega)(۶ + j\omega)}$ **(ت)** $X(j\omega) = \dfrac{۱}{۲ + j\omega}$



شکل م۶-۲۱

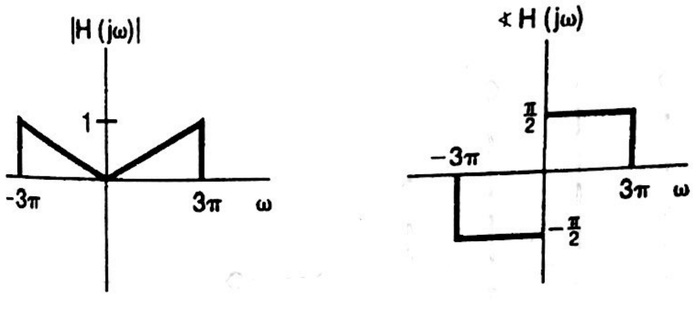
۶-۲۲ پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ برای یک فیلتر زمان- پیوسته موسوم به مشتق‌گیر پایین گذر در شکل م۶-۲۲ (الف) نشان داده شده است. برای هر یک از سیگنال‌های ورودی $x(t)$ زیر، سیگنال فیلتر شدهٔ خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

(الف) $x(t) = \cos(۲\pi t + \theta)$

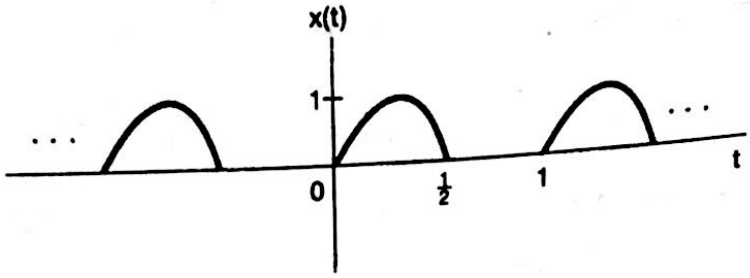
(ب) $x(t) = \cos(۴\pi t + \theta)$

(پ) $x(t)$ برابر موج سینوسی یکسو شدهٔ نیم موج است با دورهٔ تناوبی که در شکل م۶-۲۲ (ب) ترسیم شده است:

$$x(t) = \begin{cases} \sin ۲\pi t, & m \leq t \leq (m + \frac{۱}{۲}) \\ \circ, & (m + \frac{۱}{۲}) \leq t \leq m \end{cases} \quad , m \text{ برای هر عدد صحیح}$$



(الف)



شکل م۶-۲۲

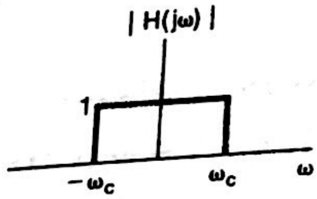
(ب)

۶-۲۳ $|H(j\omega)|$ برای یک فیلتر پایین‌گذر در شکل م۶-۲۳ نشان داده شده است. پاسخ ضربهٔ این فیلتر را به‌ازای هر یک از مشخصه‌های فاز زیر تعیین و رسم کنید.

(الف) $\sphericalangle H(j\omega) = ۰$

(ب) $\sphericalangle H(j\omega) = \omega T$، که درآن T برابر یک ثابت است.

(پ)
$$H(j\omega) = \begin{cases} \frac{\pi}{۲}, & \omega > ۰ \\ -\frac{\pi}{۲}, & \omega < ۰ \end{cases}$$



شکل م۶-۲۳

۶-۲۴ یک فیلتر پایین‌گذر زمان- پیوسته را در نظر بگیرید که می‌دانیم پاسخ ضربهٔ آن حقیقی بوده و اندازهٔ پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} ۱, & |\omega| \le ۲۰۰\pi \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) پاسخ ضربهٔ با مقدار حقیقی $h(t)$ را برای این سیستم وقتی که تابع تأخیر گروه متناظر به صورت زیر مشخص شده است، تعیین کنید:

(۱) $\tau(\omega) = ۵$ **(۲)** $\tau(\omega) = \frac{۵}{۲}$ **(۳)** $\tau(\omega) = -\frac{۵}{۲}$

(ب) اگر مشخص نشده بود که پاسخ ضربه $h(t)$ حقیقی است، آیا اطلاع از $|H(j\omega)|$ و $\tau(\omega)$ برای تعیین $h(t)$ به طور یکتا کفایت می‌کرد؟ جواب خود را توجیه کنید.

۶-۲۵ با محاسبهٔ تأخیر گروه در دو فرکانس انتخابی، تحقیق کنید که هر یک از پاسخهای فرکانسی زیر دارای فاز غیرخطی است:

(الف) $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$ (ب) $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)^2}$

(پ) $H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)(j\omega + 2)}$

۶-۲۶ فیلتر بالاگذر ایده‌آلی را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر مشخص شده است:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| > \omega_c \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(الف) پاسخ ضربهٔ $h(t)$ را برای این فیلتر تعیین کنید.

(ب) وقتی ω_c افزایش یابد، $h(t)$ حول مبدأ بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟.

(پ) $s(0)$ و $s(\infty)$ را تعیین کنید، که در اینجا $s(t)$ پاسخ پلهٔ این فیلتر است.

۶-۲۷ خروجی $y(t)$ یک سیستم LTI علّی با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به ورودی $x(t)$ مرتبط می‌شود:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

(الف) پاسخ فرکانسی

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

را برای این سیستم تعیین کرده و نمودار بودی آن را ترسیم کنید.

(ب) تأخیر گروه این سیستم را به صورت تابعی از ω مشخص کنید.

(پ) اگر $x(t) = e^{-t}u(t)$ باشد، تبدیل فوریهٔ خروجی، $Y(j\omega)$، را تعیین کنید.

(ت) با استفاده از روش گسترش به کسرهای جزئی، خروجی $y(t)$ را برای ورودی $x(t)$ در قسمت (پ) تعیین کنید.

(ث) اگر تبدیل فوریهٔ ورودی ابتدا به صورت زیر باشد، قسمتهای (پ) و (ت) را تکرار کنید:

(۱) $X(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{2 + j\omega}$

سپس اگر:

(۲) $X(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega}$

و سرانجام اگر:

(۱) $X(j\omega) = \frac{1}{(2 + j\omega)(1 + j\omega)}$

۶-۲۸ (الف) نمودارهای بودی را برای پاسخهای فرکانسی زیر ترسیم نمایید.

(۱) $1 + (j\omega/10)$ **(۲)** $1 - (j\omega/10)$ **(۳)** $\frac{16}{(j\omega + 2)^4}$

(۴) $\dfrac{1-(j\omega/10)}{1+j\omega}$ (۵) $\dfrac{(j\omega/10)-1}{1+j\omega}$

(۶) $\dfrac{1+(j\omega/10)}{1+j\omega}$

(۷) $\dfrac{1-(j\omega/10)}{(j\omega)^2+(j\omega)+1}$ (۸) $\dfrac{10+5j\omega+10(j\omega)^2}{1+(j\omega/10)}$

(۹) $1+j\omega+(j\omega)^2$

(۱۰) $1-j\omega+(j\omega)^2$ (۱۱) $\dfrac{(j\omega+10)(10j\omega+1)}{[(j\omega/100)+1][(j\omega)^2+j\omega+1]}$

(ب) پاسخ ضربه و پاسخ پلهٔ سیستمی با پاسخ فرکانسی (۴) را تعیین و رسم کنید. همین کار را برای سیستمی با پاسخ فرکانسی (۶) انجام دهید.

سیستم داده شده در (۴) را اغلب غیرمی‌نیمم فاز می‌نامند، و حال آن که سیستم مشخص شده در (۶) موسوم به می‌نیمم فاز است. پاسخهای ضربهٔ متناظر (۴) و (۶) را به ترتیب سیگنال غیرمی‌نیمم فاز و سیگنال می‌نیمم فاز می‌نامند. از مقایسهٔ نمودارهای بودی این دو پاسخ فرکانسی، می‌توان ملاحظه کرد که این دو سیستم دارای اندازه‌های یکسان هستند؛ اما اندازهٔ فاز برای سیستم (۴) بزرگتر از سیستم (۶) است.

همچنین می‌توان به تفاوتهای رفتار حوزهٔ زمانی این دو سیستم توجه کرد. به عنوان مثال، پاسخ ضربهٔ سیستم می‌نیمم فاز در مقایسه با پاسخ ضربهٔ سیستم غیرمی‌نیمم فاز، انرژی بیشتری را در نزدیک $t=0$ متمرکز کرده است. به علاوه، پاسخ پلهٔ (۴) در ابتدا علامتی مخالف با مقدار مجانبی آن وقتی که $t\to\infty$ میل می‌کند، دارد، در صورتی که برای سیستم (۶) چنین نیست.

مفهوم مهم سیستم‌های می‌نیمم فاز و غیرمی‌نیمم فاز را می‌توان به سیستم‌های LTI کلی‌تر از سیستم‌های مرتبهٔ اول که در اینجا به آن پرداختیم، تعمیم داد، و مشخصه‌های اختصاصی این سیستم‌ها را می‌توان بسیار کاملتر از آن چه که بیان شد، تشریح کرد.

۶-۲۹ گویند یک سیستم LTI در یک فرکانس خاص $\omega=\omega_0$ پیش فاز است اگر $\sphericalangle H(j\omega_0)>0$ باشد. این اصطلاح برخاسته از این واقعیت است که اگر ورودی این سیستم $e^{j\omega_0 t}$ باشد، آنگاه فاز خروجی بیشتر از، یا جلوتر از، فاز ورودی است. به طور مشابه، اگر $\sphericalangle H(j\omega_0)<0$ باشد، گفته می‌شود که سیستم دراین فرکانس، پس فاز است. توجه کنید که سیستم با پاسخ فرکانسی زیر:

$$\frac{1}{1+j\omega\tau}$$

برای تمام $\omega>0$ پس فاز است، در صورتی که سیستم با پاسخ فرکانسی زیر:

$$1+j\omega\tau$$

برای تمام $\omega>0$ پیش فاز است.

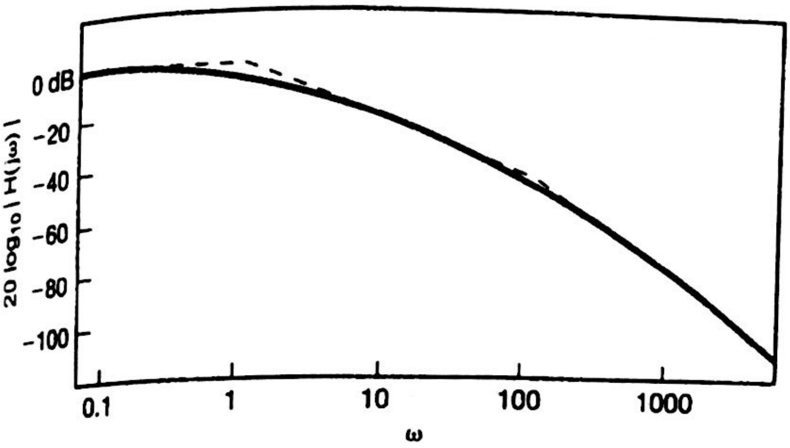
(الف) نمودارهای بودی را برای دو سیستم زیر رسم کنید. کدام یک پیش فاز و کدام یک پس فاز است؟ همچنین، کدام یک در پاره‌ای از فرکانس‌ها سیگنال را تقویت می‌کند؟

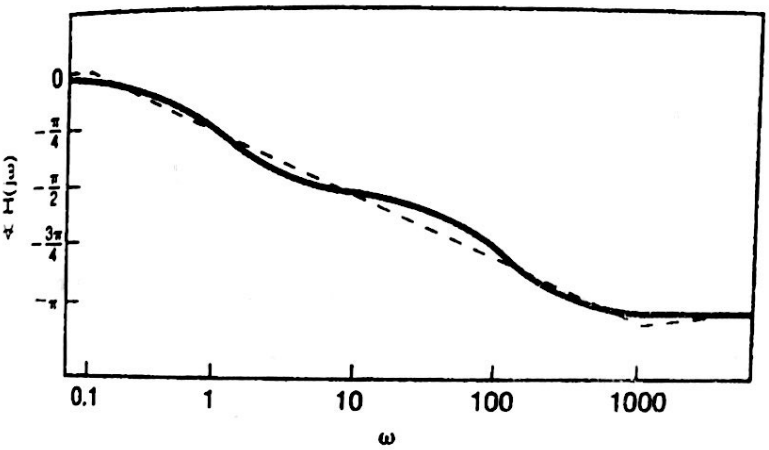
(۱) $\dfrac{1 + (j\omega/10)}{1 + 10/j\omega}$ (۲) $\dfrac{1 + 10\,j\omega}{1 + (j\omega/10)}$

(ب) قسمت (الف) را برای سه پاسخ فرکانسی زیر تکرار کنید:

(۱) $\dfrac{(1+(j\omega/10))^2}{(1 + 10j\omega)^3}$ (۲) $\dfrac{1 + (j\omega/10)}{100(j\omega)^2 + 10j\omega+1}$ (۳) $\dfrac{1 + 10j\omega}{0/01(j\omega)^2+0/2j\omega + 1}$

۶-۳۰ فرض کنید $x(t)$ دارای نمودار بودی نشان داده شده در شکل م ۶-۳۰ باشد. خط چین‌ها در شکل نشان دهندهٔ تقریبهای با خطوط مستقیم هستند. نمودار بودی را برای $10x(10t)$ ترسیم نمایید.





شکل م۶-۳۰

۶-۳۱ پاسخ فرکانسی انتگرال‌گیر به صورت زیر است:

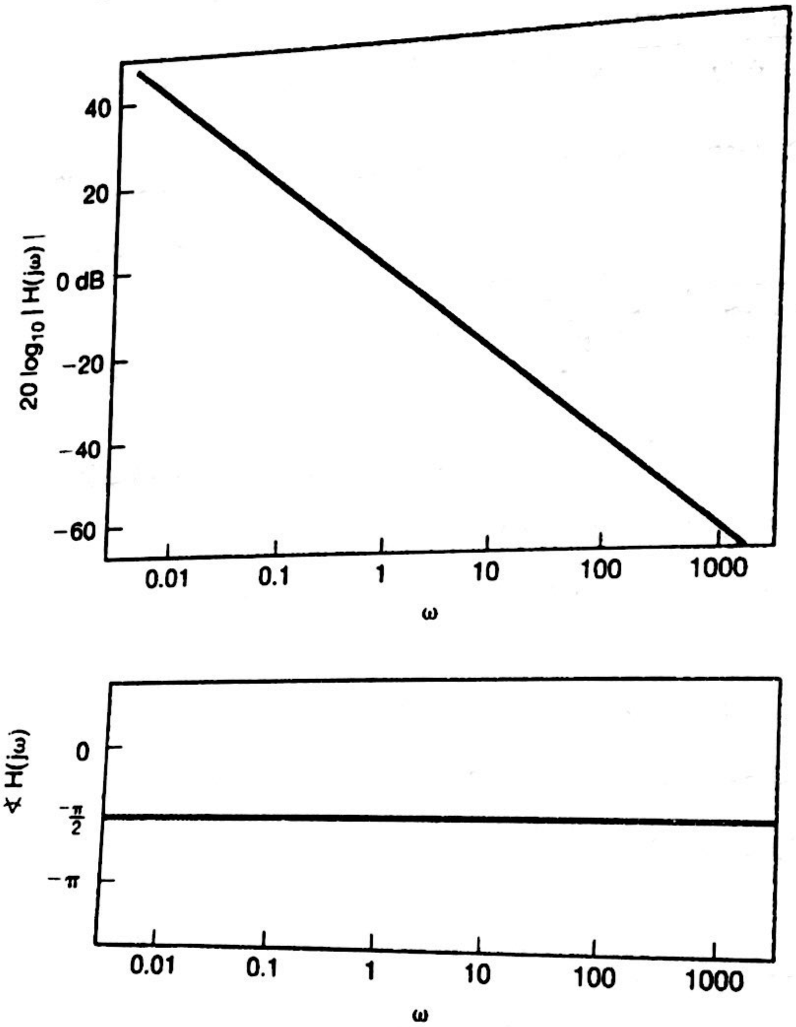
$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega),$$

که درآن، ضربهٔ در $\omega = 0$ گویای این واقعیت است که انتگرال‌گیری از یک ورودی ثابت از $t = -\infty$ منجر به خروجی نامحدود می‌شود. بنابراین اگر از ورودیهای ثابت اجتناب شود، یا به طور معادل، $H(j\omega)$ فقط برای $\omega > 0$ در نظر گرفته شود، می‌بینیم که:

$$20\log|H(j\omega)| = -20\log(\omega)\ ,$$

$$\sphericalangle H(j\omega) = \frac{-\pi}{۲}.$$

به عبارت دیگر، نمودار بودی یک انتگرال‌گیر، همان‌طور که در شکل م ۶-۳۱ تصویر شده، متشکل از دو نمودار با خطوط مستقیم است. این نمودارها مشخصه‌های اصلی یک انتگرال‌گیر را نشان می‌دهند: یک انتقال فاز ۹۰°- برای کلیهٔ مقادیر مثبت فرکانس و تقویت فرکانس‌های پایین.



شکل م۶-۳۱

(الف) مدل ساده و مفیدی برای یک موتور الکتریکی عبارت است از یک سیستم LTI با ورودی برابر ولتاژ اعمالی و خروجی برابر زاویهٔ محور موتور. این سیستم را می‌توان به صورت اتصال متوالی یک سیستم LTI پایدار (با ولتاژ به عنوان ورودی و سرعت زاویه‌ای محور به عنوان خروجی) و یک انتگرال‌گیر (که انتگرال سرعت زاویه‌ای را نشان می‌دهد) تصور کرد. اغلب از مدل سیستم مرتبهٔ اول برای قسمت اول اتصال متوالی استفاده می‌شود. به عنوان مثال، با فرض آن که این سیستم مرتبهٔ اول دارای ثابت زمانی ۰/۱ ثانیه باشد، پاسخ فرکانسی کل موتور به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega/10)} + \pi\,\delta(\omega)\,.$$

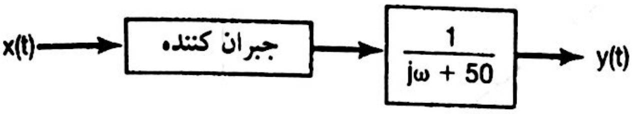
نمودار بودی این سیستم را برای $\omega > 0{,}001$ ترسیم نمایید.

(ب) نمودار بودی مشتق‌گیر را ترسیم کنید.

(پ) همین کار را برای سیستم‌های با پاسخهای فرکانسی زیر انجام دهید:

$$(1)\quad H(j\omega) = \frac{j\omega}{1 + j\omega/100} \qquad (2)\quad H(j\omega) = \frac{j\omega}{(1 + (j\omega)/100 + (j\omega)^2/100)}$$

۶-۳۲ سیستم نشان داده شده در شکل م۶-۳۲ را در نظر بگیرید. جعبهٔ «جبران کننده» یک سیستم LTI زمان- پیوسته است.



شکل م۶-۳۲

(الف) فرض کنید که بخواهیم پاسخ فرکانسی جبران کننده را طوری انتخاب کنیم که پاسخ فرکانسی کل $H(j\omega)$ برای اتصال متوالی در دو شرط زیر صدق کند:

۱- لگاریتم اندازهٔ $H(j\omega)$ در فرکانس‌های بالاتر از $\omega = 1{,}000$ دارای شیب ۴۰dB/دهه- است.

۲- برای $1{,}000 > \omega > 0$، لگاریتم اندازهٔ $H(j\omega)$ باید بین ۱۰dB- و ۱۰dB باشد.

یک جبران کنندهٔ مناسب را طراحی کنید (یعنی، پاسخ فرکانسی جبران کننده را چنان تعیین کنید که خواسته‌های فوق را برآورد)، و نمودار بودی را برای $H(j\omega)$ی به دست آمده رسم کنید.

(ب) اگر مشخصات لگاریتم اندازهٔ $H(j\omega)$ به شرح زیر باشد، قسمت (الف) را تکرار کنید:

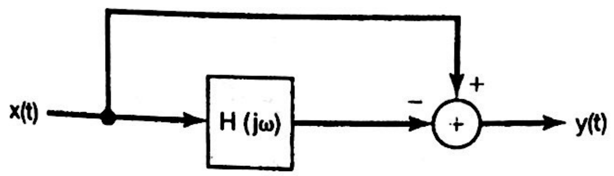
۱- برای $10 > \omega > 0$، باید شیب ۲۰dB/دهه + داشته باشد.

۲- برای $100 > \omega > 10$، باید بین ۱۰dB + و ۳۰dB + داشته باشد.

۳- برای $1{,}000 > \omega > 100$، باید شیب ۲۰dB/دهه - داشته باشد.

۴- برای $\omega > 1{,}000$، باید شیب ۴۰dB/دهه - داشته باشد.

۶-۳۳ شکل م۶-۳۳ سیستمی را نشان می‌دهد که معمولاً برای به دست آوردن یک فیلتر بالاگذر از یک فیلتر پایین‌گذر یا بالعکس استفاده می‌شود.



شکل م۶-۳۳

(الف) نشان دهید که اگر $H(j\omega)$ یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل با فرکانس قطع ω_{lp} باشد، سیستم کلی متناظر با یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل است. فرکانس قطع سیستم را تعیین کرده و پاسخ ضربهٔ آن را رسم کنید.

(ب) نشان دهید که اگر $H(j\omega)$ یک فیلتر بالاگذر ایده‌آل با فرکانس قطع ω_{hp} باشد، سیستم کلی متناظر با یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل است، و فرکانس قطع سیستم را تعیین کنید.

(پ) اگر بهم پیوستن شکل م۶-۳۳ در مورد یک فیلتر پایین‌گذر زمان‌ـگسستهٔ ایده‌آل به کار رود، آیا سیستم حاصل یک فیلتر بالاگذر زمان‌ـگسستهٔ ایده‌ال خواهد بود؟

۶-۳۴ در مسألهٔ ۶-۳۳ سیستمی را مطرح کردیم که معمولاً برای به دست آوردن یک فیلتر بالاگذر از یک فیلتر پایین گذر یا بالعکس استفاده می‌شود. در این مسأله این سیستم را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم و به خصوص، یک مشکل بالقوّه را در صورتی که فاز $H(j\omega)$ به طور مناسبی انتخاب نشود، مطرح می‌کنیم.

(الف) با توجه به شکل م۶-۳۳، فرض کنید که $H(j\omega)$ حقیقی و به صورت نشان داده شده در شکل م۶-۳۴ باشد. دراین صورت داریم:

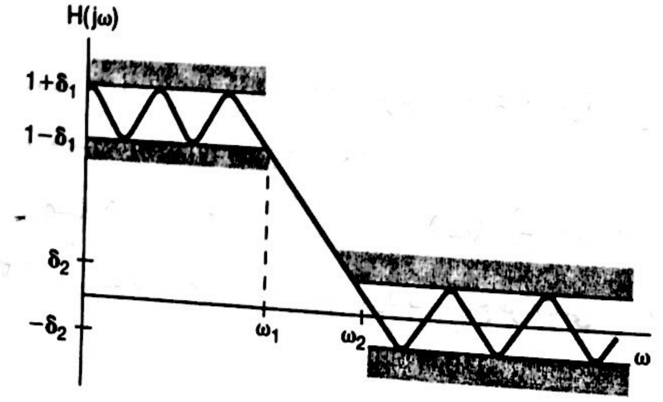
$$1 - \delta_1 < H(j\omega) < 1 + \delta_1 \ , \quad 0 \le \omega \le \omega_1 \ ,$$
$$-\delta_2 < H(j\omega) < +\delta_2 \ , \quad \omega_2 < \omega \ .$$

پاسخ فرکانسی حاصل از سیستم کلی در شکل م۶-۳۳ را تعیین و رسم کنید. آیا سیستم حاصل، متناظر با تقریبی از یک فیلتر بالاگذر است؟

(ب) اکنون فرض کنید $H(j\omega)$ در شکل م۶-۳۳ به صورت زیر باشد:

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)e^{j\theta(\omega)}, \qquad (\text{م}۶-۳۴-۱)$$

که درآن $H_1(j\omega)$ مطابق شکل م۶-۳۴ بوده و $\theta(\omega)$ یک مشخصهٔ فاز نامشخص است. با $H(j\omega)$ به این صورت کلی‌تر، آیا هنوز هم سیستم مزبور متناظر با تقریبی از یک فیلتر بالاگذر است؟



شکل م۶-۳٤

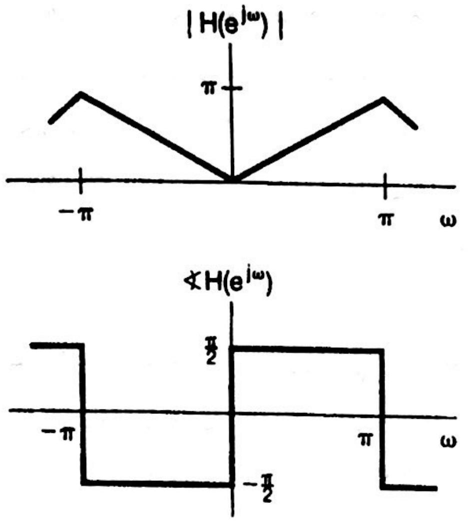
(پ) بدون هر گونه فرضی دربارهٔ $\theta(\omega)$، محدوده‌های تولرانس اندازهٔ پاسخ فرکانسی سیستم کلی شکل م۶-۳۳ را تعیین و رسم کنید.

(ت) اگر $H(j\omega)$ در شکل م۶-۳۳ تقریبی از یک فیلتر پایین‌گذر با مشخصهٔ فاز نامعین باشد، آیا سیستم کلی دراین شکل لزوماً متناظر با تقریبی از فیلتر بالاگذر خواهد بود؟

۶-۳۵ پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ برای یک مشتق‌گیر زمان-گسسته در شکل م۶-۳۵ نشان داده شده است. اگر ورودی $x[n]$ به صورت زیر باشد:

$$x[n] = \cos[\omega_\circ n + \theta],$$

سیگنال خروجی $y[n]$ را به صورت تابعی از $\omega_\circ$ تعیین کنید.



شکل م۶-۳۵

۶-۳۶ یک فیلتر پایین‌گذر زمان-گسسته را در نظر بگیرید که می‌دانیم پاسخ ضربهٔ آن $h[n]$ حقیقی است و اندازهٔ پاسخ فرکانسی آن در ناحیهٔ $-\pi \le \omega \le \pi$ به صورت زیر داده شده است:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} ۱, & |\omega| \le \frac{\pi}{۴} \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

پاسخ ضربهٔ با مقدار حقیقی $h[n]$ را برای این فیلتر وقتی که تابع تأخیر گروه متناظر به‌صورتهای زیر مشخص شده است، تعیین و رسم کنید:

(الف) $\tau(\omega) = ۵$ **(ب)** $\tau(\omega) = \frac{۵}{۲}$ **(پ)** $\tau(\omega) = -\frac{۵}{۲}$

۶-۳۷ یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر داده شده است:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\,\frac{۱ - \frac{۱}{۲}e^{j\omega}}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}.$$

(الف) نشان دهید که $|H(e^{j\omega})|$ در تمام فرکانس‌ها برابر واحد است.

(ب) نشان دهید که :

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega - ۲\tan^{-۱}\left(\frac{\frac{۱}{۲}\sin\omega}{۱ - \frac{۱}{۲}\cos\omega}\right).$$

(پ) نشان دهید که تأخیر گروه برای این فیلتر به صورت زیر است:

$$\tau(\omega) = \frac{\frac{۳}{۴}}{\frac{۵}{۴} - \cos\omega}.$$

$\tau(\omega)$ را رسم کنید.

(ت) اگر ورودی این فیلتر برابر $\cos\left(\frac{\pi}{۳}n\right)$ باشد، خروجی آن برابر چیست؟

۶-۳۸ یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل را در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن در ناحیهٔ $-\pi \le \omega \le \pi$ به صورت زیر مشخص شده است:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} ۱, & \frac{\pi}{۲} - \omega_c \le \omega \le \frac{\pi}{۲} + \omega_c \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

در حالتهای زیر، پاسخ ضربهٔ $h[n]$ را برای این فیلتر تعیین و رسم کنید:

(الف) $\omega_c = \frac{\pi}{۵}$ (ب) $\omega_c = \frac{\pi}{۴}$ (پ) $\omega_c = \frac{\pi}{۳}$

وقتی ω_c افزایش می‌یابد، $h[n]$ حول مبدأ بیشتر متمرکز می‌شود یا کمتر؟

۶-۳۹ لگاریتم اندازه و فاز هر یک از پاسخهای فرکانسی زیر را رسم کنید:

(الف) $۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}$ (ب) $۱ + ۲e^{-j\omega}$ (پ) $۱ - ۲e^{-j\omega}$

(ت) $۱ + ۲e^{-j۲\omega}$ (ث) $\frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega})^۳}$ (ج) $\frac{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}{۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}$

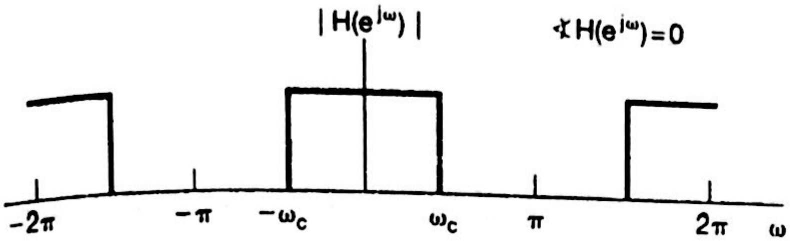
(چ) $\frac{۱ + ۲e^{-j\omega}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}$ (ح) $\frac{۱ - ۲e^{-j\omega}}{۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega}}$ (خ) $\frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۳}{۴}e^{-j\omega})}$

(د) $\frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})(۱ + \frac{۳}{۴}e^{-j\omega})}$ (ذ) $\frac{۱ + ۲e^{-۲j\omega}}{(۱ - \frac{۱}{۲}e^{-j\omega})^۲}$

۶-۴۰ یک فیلتر پایین‌گذر زمان-گسستهٔ ایده‌آل را با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ در نظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن $H(e^{j\omega})$ در شکل م۶-۴۰ نشان داده شده است. اکنون به دست آوردن یک فیلتر جدید با پاسخ ضربهٔ $h_۱[n]$ و پاسخ فرکانسی $H_۱(e^{j\omega})$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n/2], & n \text{ زوج} \\ 0, & n \text{ فرد} \end{cases}.$$

این کار متناظر با قرار دادن دنباله‌ای با مقدار صفر بین مقادیر دنبالهٔ $h[n]$است. $H_1(e^{j\omega})$را تعیین و رسم کنید و بگویید که به کدام دسته از فیلترهای ایده‌آل تعلق دارد (مثلاً، پایین‌گذر، بالاگذر، میان‌گذر، چند بانده، و غیره).



شکل م۶-۴۰

۶-۴۱ سیستم LTI علّی خاصی با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2}\, y[n-1] + \frac{1}{4}\, y[n-2] = x[n] - x[n-1]\ .$$

(الف) پاسخ ضربهٔ این سیستم را به دست آورید.

(ب) لگاریتم اندازه و فاز پاسخ فرکانسی سیستم را رسم کنید.

۶-۴۲ (الف) دو سیستم LTI با پاسخهای فرکانسی زیر را در نظر بگیرید:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\ ,\quad H_2(e^{j\omega}) = \frac{\frac{1}{2} + e^{-j\omega}}{1 + \frac{1}{4}e^{-j\omega}}.$$

نشان دهید که هر دوی این پاسخهای فرکانسی دارای تابع اندازهٔ یکسانی هستند [یعنی، $|H_1(e^{j\omega})| = |H_2(e^{j\omega})|$]، امّا تأخیر گروه $H_2(e^{j\omega})$، برای $\omega > 0$، بزرگتر از تأخیر گروه $H_1(e^{j\omega})$ است.

(ب) پاسخهای ضربه و پلهٔ دو سیستم را تعیین و رسم کنید.

(پ) نشان دهید:

$$H_2(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})\, H_1(e^{j\omega}),$$

که درآن $G(e^{j\omega})$ یک سیستم تمام‌گذر است [یعنی، برای تمام ωها، $|G(e^{j\omega})| = 1$ است].

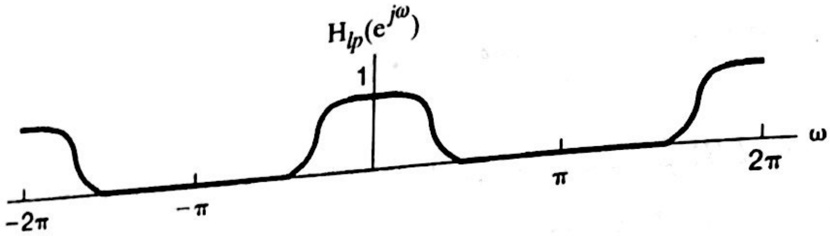
۶-۴۳ هنگام طراحی فیلترهایی با مشخصه‌های بالاگذر یا میان‌گذر، اغلب راحت‌تر است که ابتدا یک فیلتر پایین‌گذر با مشخصات باند عبور و باند قطع مطلوب طراحی شود و سپس این فیلتر نمونه به فیلتر بالاگذر یا میان‌گذر مطلوب تبدیل شود. چنین تبدیلهایی را تبدیل پایین‌گذر-به-بالاگذر یا پایین‌گذر-به-میان‌گذر می‌نامند. طراحی فیلترها به این طریق مناسب است زیرا دراین صورت فقط لازم می‌شود که الگوریتمهای طراحی فیلتر را برای دسته فیلترهای با مشخصه‌های پایین‌گذر

فرموله کنیم. به عنوان یک مثال از چنین روندی، یک فیلتر پایین‌گذر زمان-گسسته با پاسخ ضربهٔ $h_{lp}[n]$ و پاسخ فرکانسی $H_{lp}(e^{j\omega})$ را چنان که در شکل م۶-۴۳ ترسیم شده است، در نظر بگیرید.

فرض کنید که پاسخ ضربه با دنبالهٔ $(-1)^n$ مدوله می‌شود تا $h_{hp}[n] = (-1)^n h_{lp}[n]$ به دست آید.

(الف) $H_{hp}(e^{j\omega})$ را بر حسب $H_{lp}(e^{j\omega})$ تعیین و رسم کنید. به خصوص نشان دهید که برای $H_{lp}(e^{j\omega})$ به صورت نشان داده شده است در شکل م۶-۴۳، $H_{hp}(e^{j\omega})$ متناظر با یک فیلتر بالاگذر است.

(ب) نشان دهید که مدولاسیون پاسخ ضربهٔ یک فیلتر بالاگذر زمان-گسسته با $(-1)^n$ آن را به یک فیلتر پایین‌گذر تبدیل می‌کند.

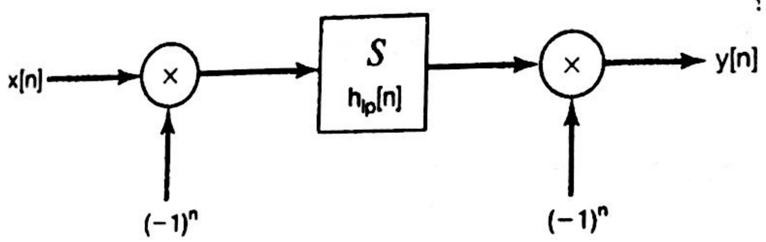


شکل م۶-۴۳

۶-۴۴ یک سیستم زمان-گسسته به صورت نشان داده شده در شکل م۶-۴۴ پیاده سازی شده است. سیستم S نشان داده شده در این شکل، یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h_{lp}[n]$ است.

(الف) نشان دهید که سیستم کلی تغییر ناپذیر با زمان است.

(ب) اگر $h_{lp}[n]$ یک فیلتر پایین‌گذر باشد، سیستم داده شده در شکل چه نوع فیلتری را پیاده سازی می‌کند؟



شکل م۶-۴۴

۶-۴۵ سه پاسخ فرکانسی زیر را برای سیستم‌های LTI مرتبهٔ سوم علّی و پایدار در نظر بگیرید. با استفاده از خواص سیستمهای مرتبهٔ اول و دوم که در بخش ۶-۶ مطرح شد، تعیین کنید که آیا پاسخ ضربهٔ هر یک از این سیستم‌های مرتبهٔ سوم نوسانی است یا خیر. (توجه: شما باید بتوانید بدون گرفتن عکس تبدیل فوریه از پاسخهای فرکانسی سیستم‌های مرتبهٔ سوم، به این پرسشها پاسخ دهید).

$$H_۱(e^{j\omega}) = \frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۲}e^{j\omega})(۱ - \frac{۱}{۳}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})},$$

$$H_۲(e^{j\omega}) = \frac{۱}{(۱ + \frac{۱}{۲}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۳}e^{-j\omega})(۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega})},$$

$$H_{۲}(e^{j\omega}) = \frac{۱}{(۱ - \frac{۱}{۲} e^{-j\omega})(۱ - \frac{۳}{۴} e^{-j\omega})(۱ - \frac{۹}{۱۶} e^{-j۲\omega})}.$$

۶-۴۶ یک فیلتر غیربازگشتی (FIR) و علّی را در نظر بگیرید که پاسخ ضربهٔ با مقدار حقیقی آن $h[n]$ برای $n \geq N$ برابر صفر است.

(الف) با فرض این که N فرد باشد، نشان دهید که اگر $h[n]$ حول $(N - ۱)/۲$ متقارن باشد (یعنی، اگر $h[(N-۱)/۲ + n] = h[(N-۱)/۲-n]$)، آنگاه:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)\, e^{-j[(N-۱)/۲]\omega},$$

که درآن $A(\omega)$ تابعی با مقدار حقیقی از ω است. نتیجه می‌گیریم که فیلتر دارای فاز خطی است.

(ب) مثالی از یک پاسخ ضربهٔ $h[n]$ مربوط به یک فیلتر FIR با فاز خطی و علّی ارائه دهید به طوری که برای $n \geq ۵$ ، $h[n] = ۰$ بوده و برای $۰ \leq n \leq ۴$ ، $h[n] \neq ۰$ باشد.

(پ) با فرض این که N زوج باشد، نشان دهید که اگر $h[n]$ حول $(N - ۱)/۲$ متقارن باشد (یعنی، اگر $h[(N/۲) + n] = h[(N/۲) - n - ۱]$)، آنگاه:

$$H(e^{j\omega}) = A(\omega)\, e^{-j[(N-۱)/۲]\omega},$$

که درآن $A(\omega)$ تابعی با مقدار حقیقی از ω است.

(ت) مثالی از یک پاسخ ضربهٔ $h[n]$ مربوط به یک فیلتر FIR با فاز خطی و علّی ارائه دهید به طوری که برای $n \geq ۴$ ، $h[n] = ۰$ بوده و برای $۰ \leq n \leq ۳$ ، $h[n] \neq ۰$ باشد.

۶-۴۷ یک میانگین متحرک متقارن سه نقطه‌ای، موسوم به میانگین متحرک وزن دهی شده، به صورت زیر است:

$$y[n] = b\{ax[n - ۱] + x[n] + ax[n + ۱]\}. \qquad (م۶-۴۷-۱)$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را برای میانگین متحرک سه نقطه‌ای در معادلهٔ (م۶-۴۷-۱)، به صورت تابعی از a و b ، تعیین کنید.

(ب) ضریب تغییر مقیاس b را چنان تعیین کنید که $H(e^{j\omega})$ دارای بهرهٔ واحد در فرکانس صفر باشد.

(پ) در بسیاری از مسائل تحلیل سری زمانی، یک انتخاب معمول برای ضریب a در میانگین متحرک وزن دهی شده در معادلهٔ (م۶-۴۷-۱) به صورت $a = ۱/۲$ است. پاسخ فرکانسی فیلتر حاصل را تعیین و رسم کنید.

۶-۴۸ یک فیلتر زمان‌ـ‌گسستهٔ میانگین متحرک چهار نقطه‌ای را در نظر بگیرید که معادلهٔ تفاضلی آن به

صورت زیر است:

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + b_3 x[n-3].$$

برای هر یک از حالتهای زیر، اندازهٔ پاسخ فرکانسی را تعیین و رسم کنید:

(الف) $b_0 = b_3 = 0 \ , \ b_1 = b_2$ (ب) $b_1 = b_2 = 0 \ , \ b_0 = b_3$

(پ) $b_0 = b_1 = b_2 = b_3$ (ت) $b_0 = -b_1 = b_2 = -b_3$

مسائل پیشرفته

۶-۴۹ ثابت زمانی معیاری است از این که یک سیستم مرتبهٔ اول با چه سرعتی به ورودیها پاسخ می‌دهد. ایدهٔ اندازه‌گیری سرعت پاسخ یک سیستم برای سیستم‌های مرتبهٔ بالاتر نیز مهم است، و در این مسأله تعمیم ثابت زمانی به چنین سیستم‌هایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

(الف) به خاطر بیاورید که ثابت زمانی یک سیستم مرتبهٔ اول با پاسخ ضربهٔ زیر

$$h(t) = ae^{-at}u(t) \ , \ a > 0$$

برابر $1/a$ است، که مساوی مقدار زمانی است که از $t = 0$ طول می‌کشد تا پاسخ پلهٔ سیستم $s(t)$ به فاصلهٔ $1/e$ از مقدار نهایی خود [یعنی، $s(t)$ $[s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t)]$ قرار گیرد. با استفاده از همین تعریف کمّی، معادله‌ای را که باید برای تعیین ثابت زمانی سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلهٔ دیفرانسیل زیر حل کرد، به دست آورید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 10\,y(t) = 9\,x(t). \qquad \text{(م۶-۴۹-۱)}$$

(ب) چنان که از قسمت (الف) می‌توان ملاحظه کرد، اگر از تعریف دقیق ثابت زمانی که در آنجا مشخص شده استفاده کنیم، عبارت ساده‌ای برای ثابت زمانی یک سیستم مرتبهٔ اول به دست می‌آوریم، امّا محاسبات برای سیستم داده شده در معادلهٔ (م۶-۴۹-۱) قطعاً پیچیده‌تر است. با وجود این، نشان دهید که می‌توان این سیستم را به صورت بهم پیوستن موازی دو سیستم مرتبهٔ اول در نظر گرفت. بدین ترتیب، معمولاً چنین تصور می‌کنیم که سیستم در معادلهٔ (م۶-۴۹-۱) دارای دو ثابت زمانی ، متناظر با دو عامل مرتبهٔ اول، است. دو ثابت زمانی برای این سیستم کدامند؟

(پ) موضوعی را که در قسمت (ب) مطرح شد می‌توان مستقیماً به کلیه سیستم‌هایی که پاسخهای ضربهٔ آنها به صورت ترکیبهایی خطی از نمایی‌های کاهشی هستند، تعمیم داد. در هر سیستمی از این نوع، می‌توان ثابتهای زمانی غالب سیستم را که همان بزرگترین ثابتهای زمانی هستند، شناسایی کرد. اینها نشان دهندهٔ کُندترین قسمتهای پاسخ سیستم هستند، و در نتیجه براین که سیستم به‌طورکلی با چه سرعتی می‌تواند پاسخ دهد، اثر غالب دارند. ثابت زمانی غالب سیستم در معادلهٔ (م۶-۴۹-۱) کدام است؟ این ثابت زمانی را در معادلهٔ تعیین

شده در قسمت (الف) قرار دهید. اگرچه این عدد در معادله به طور دقیق صدق نخواهد کرد، می‌بینید که به طور تقریبی صدق می‌کند و این گویای آن است که ثابت زمانی غالب بسیار نزدیک به ثابت زمانی تعریف شده در قسمت (الف) است. بدین ترتیب، روشی که در قسمت (ب) و دراین قسمت مطرح شد، از نظر فراهم آوردن شناختی نسبت به سرعت پاسخ سیستم‌های LTI بدون نیاز به محاسبات زیاد، ارزشمند است.

(ت) یک کاربرد مهم مفهوم ثابتهای زمانی غالب در تقلیل مرتبهٔ سیستم‌های LTI است. این موضوع در مسائلی که شامل تحلیل سیستم‌های پیچیده‌ای هستند که فقط چند تا ثابت زمانی غالب دارند و بقیهٔ ثابتهای زمانی بسیار کوچک می‌باشند، از اهمیت عملی بالایی برخوردار است. برای کاهش پیچیدگی مدل سیستمی که باید تحلیل شود، اغلب می‌توان قسمتهای سریع سیستم را ساده کرد. یعنی، فرض کنید که یک سیستم پیچیده را به صورت بهم پیوستن موازی سیستم‌های مرتبهٔ اول و دوم در نظر بگیریم. همچنین فرض کنید که یکی از این سیستم‌ها، با پاسخ ضربهٔ $h(t)$ و پاسخ پلهٔ $s(t)$، سریع است ــ یعنی این که $s(t)$ بسیار سریع به مقدار نهایی خود $s(\infty)$ می‌رسد. آنگاه می‌توان این زیرسیستم را با زیرسیستمی که به طور آنی به همان مقدار نهایی می‌رسد، تقریب زد. یعنی اگر $\hat{s}(t)$ پاسخ پلهٔ این زیرسیستم تقریبی باشد، آنگاه داریم:

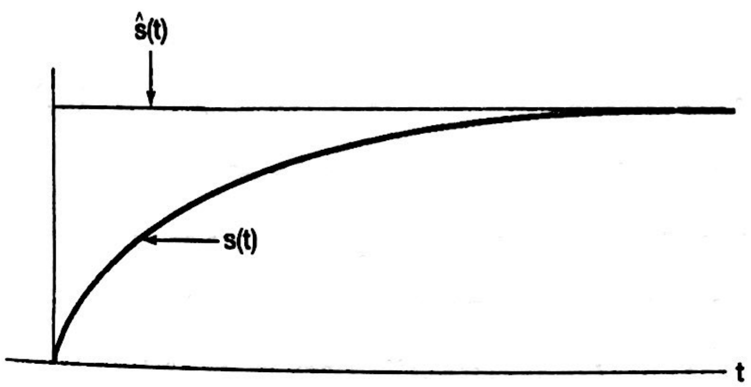
$$\hat{s}(t) = s(\infty)\, u(t).$$

این موضوع در شکل م۶-۴۹ به تصویر درآمده است. سپس توجه کنید که پاسخ ضربهٔ این سیستم تقریبی برابر است با:

$$\hat{h}(t) = s(\infty)\, \delta(t),$$

که نشان می‌دهد سیستم تقریبی بی‌حافظه است.

بار دیگر سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلهٔ (م۶-۴۹-۱) و به خصوص نمایش آن به صورت بهم پیوستن موازی دو سیستم مرتبهٔ اول را، چنان که در قسمت (ب) تشریح شد، در نظر بگیرید. از روشی که هم اکنون مطرح شد استفاده کرده و از بین



شکل م۶-٤۹

این دو، زیرسیستم سریعتر را با یک سیستم بی‌حافظه جایگزین کنید. معادلهٔ دیفرانسیلی که سیستم کلی حاصل را توصیف می‌کند، کدام است؟ پاسخ فرکانسی این سیستم چیست؟ $|H(e^{j\omega})|$ (نه $(\log |H(e^{j\omega})|$) و $\measuredangle H(j\omega)$ را هم برای سیستم اصلی و هم برای سیستم تقریبی ترسیم کنید. در چه محدوده‌ای از فرکانس، این پاسخهای فرکانسی تقریباً مساوی هستند؟ پاسخ پلهٔ هر دو سیستم را رسم کنید. در چه محدوده‌ای از زمان، پاسخهای پله تقریباً مساوی هستند؟ از روی نمودارهای خود به برخی از تشابه‌ها و تفاوتها بین سیستم اصلی و تقریب آن پی خواهید برد. استفاده از تقریبی به این صورت بستگی به کاربرد مورد نظر دارد. به خصوص، باید این نکته که ثابتهای زمانی مختلف چقدر از هم جدا هستند و همچنین ماهیت ورودیهایی که مطرح هستند را مد نظر قرار داد. چنان که از جوابهای خود در این قسمت ملاحظه خواهید کرد، در فرکانس‌های پایین، پاسخ فرکانسی سیستم تقریبی اساساً همانند پاسخ فرکانسی سیستم اصلی است. یعنی، وقتی که قسمتهای سریع سیستم در مقایسه با نرخ نوسان ورودی به قدر کافی سریع باشند، تقریب مفید واقع می‌شود.

۶-۵۰ مفاهیم مربوط به فیلتر کردن انتخابگر فرکانسی اغلب در مورد جدا سازی دو سیگنالی که با هم جمع شده‌اند، به کار می‌رود. اگر طیف دو سیگنال همپوشانی نداشته باشند، فیلترهای انتخابگر فرکانس ایده‌آل مطلوب هستند. امّا اگر طیفها همپوشانی داشته باشند، اغلب طراحی فیلتری با گذار تدریجی بین باند عبور و باند قطع، ترجیح دارد. در این مسأله ما به بررسی یک روش برای تعیین پاسخ فرکانسی فیلتری که باید برای جدا سازی سیگنال‌هایی با طیفهای همپوشان استفاده شود، می‌پردازیم. فرض کنید $x(t)$ نشان دهندهٔ یک سیگنال زمان- پیوستهٔ مرکب متشکل از مجموع دو سیگنال $s(t) + w(t)$ باشد. همان طور که در شکل م۶-۵۰ (الف) نشان داده شده است، می‌خواهیم برای به دست آوردن $s(t)$ از روی $x(t)$ یک فیلتر LTI طراحی کنیم. پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ برای فیلتر باید طوری انتخاب شود که $y(t)$ ، از یک نظر، تقریب "خوبی" از $s(t)$ باشد.

اکنون معیاری برای خطای بین $y(t)$ و $s(t)$ در هر فرکانس ω را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon(\omega) \triangleq |S(j\omega) - Y(j\omega)|^2,$$

که درآن $S(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به ترتیب تبدیلهای فوریهٔ $s(t)$ و $y(t)$ هستند.

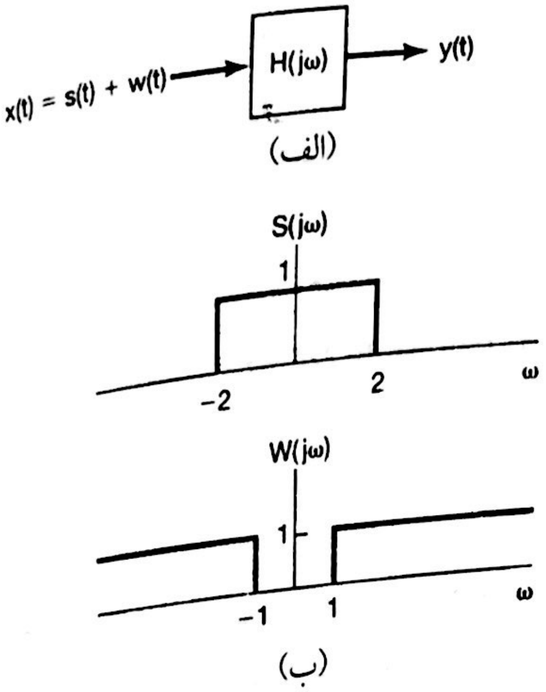
(الف) $\varepsilon(\omega)$ را بر حسب $S(j\omega)$ ، $H(j\omega)$ ، و $W(j\omega)$ بیان کنید، که درآن $W(j\omega)$ تبدیل فوریهٔ $w(t)$ است.

(ب) فرض کنید $H(j\omega)$ را محدود کنیم که حقیقی باشد، به طوری که $H(j\omega) = H^*(j\omega)$ است. با مساوی صفر قرار دادن مشتق $\varepsilon(\omega)$ نسبت به $H(j\omega)$، $H(j\omega)$یی را که لازم است تا $\varepsilon(\omega)$ حداقل شود، تعیین کنید.

(پ) نشان دهید که اگر طیفهای $S(j\omega)$ و $W(j\omega)$ همپوشانی نداشته باشند، نتیجهٔ قسمت (ب) به

صورت یک فیلتر انتخابگر فرکانس ایده‌آل در می‌آید.

(ت) با توجه به نتیجهٔ قسمت (ب)، $H(j\omega)$ را در صورتی که $S(j\omega)$ و $W(j\omega)$ به صورت نشان داده شده در شکل م۶–۵۰ (ب) باشند، تعیین و رسم کنید.



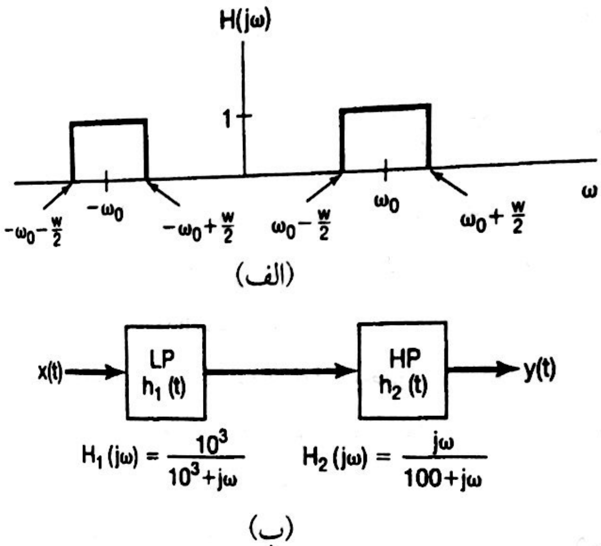
شکل م۶-۵۰

۶–۵۱ یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل، فیلتر میان‌گذری است که محدوده‌ای از فرکانس‌ها را بدون هیچگونه تغییری در دامنه و فاز عبور می‌دهد. چنان که در شکل م۶–۵۱ (الف) نشان داد شده است، فرض کنید باند عبور به‌صورت زیر باشد:

$$\omega_\circ - \frac{W}{۲} \leq |\omega| \leq \omega_\circ + \frac{W}{۲}.$$

(الف) پاسخ ضربهٔ $h(t)$ برای این فیلتر چیست؟

(ب) یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل را می‌توان با اتصال متوالی یک فیلتر پایین‌گذر مرتبهٔ اول و یک



شکل م۶-۵۱

فیلتر بالاگذر مرتبهٔ اول، چنان که در شکل م۶-۵۱ (ب) نشان داده شده است، تقریب زد. دیاگرامهای بودی هر یک از دو فیلتر $H_1(j\omega)$ و $H_2(j\omega)$ را رسم کنید.

(پ) دیاگرام بودی فیلتر میان‌گذر کل را بر حسب نتایج خود در قسمت (ب) تعیین کنید.

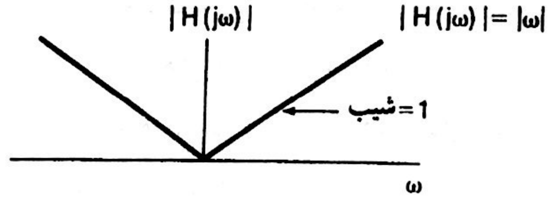
۶-۵۲ در شکل ۶-۵۲ (الف) اندازهٔ پاسخ فرکانسی یک مشتق‌گیر زمان-پیوستهٔ ایده‌آل نشان داده شده است. یک مشتق‌گیر غیرایده‌آل دارای پاسخ فرکانسی‌ای است که تقریبی از پاسخ فرکانسی داده شده در شکل می‌باشد.

(الف) یک مشتق‌گیر غیرایده‌آل با پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ را در نظر بگیرید که در آن $|G(j\omega)|$ به گونه‌ای محدود شده که در تمام فرکانس‌ها حداکثر در محدودهٔ ۱۰٪± از اندازه پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر ایده‌آل قرار گیرد؛ یعنی:

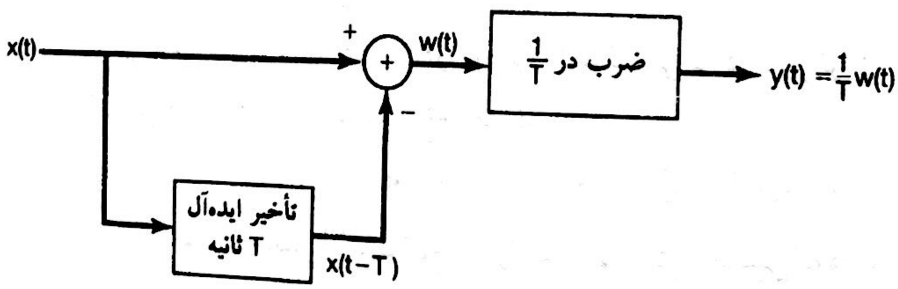
$$-0{,}1|H(j\omega)| \le [|G(j\omega)| - |H(j\omega)|] \le 0{,}1|H(j\omega)|.$$

در نمودار $G(j\omega)$ برحسب ω، ناحیه‌ای را مشخص کنید که $|G(j\omega)|$ باید به آن محدود باشد تا این مشخصه را برآورده سازد.

(ب) سیستم در شکل م۶-۵۲ (ب)، که درآن یک تأخیر ایده‌آل T ثانیه‌ای به کار رفته، گاهی اوقات برای تقریب مشتق‌گیر زمان-پیوسته استفاده می‌شود. به ازای $T = 10^{-2}$ ثانیه، محدودهٔ فرکانسی‌ای را تعیین کنید که درآن اندازهٔ پاسخ فرکانسی سیستم در این شکل در محدودهٔ ۱۰٪± پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر ایده‌آل قرار می‌گیرد.



(الف)



(ب)

شکل م۶-۵۲

۶-۵۳ در بسیاری از کاربردهای فیلتر کردن، این که پاسخ پلهٔ فیلتر از مقدار نهایی‌اش فراتر رود، اغلب امری نامطلوب است. به عنوان مثال، در پردازش تصاویر، فراجهش در پاسخ پلهٔ فیلتر خطی می‌تواند موجب درخشش ـــ یعنی افزایش شدت روشنایی ـــ در مرزهای شاخص تصویر شود. امّا با اعمال

این محدودیت که پاسخ ضربهٔ فیلتر برای تمام زمانها مثبت باشد، امکان حذف فراجهش وجود دارد. نشان دهید که اگر پاسخ ضربهٔ $h(t)$ یک فیلتر LTI زمان- پیوسته همواره بزرگتر از یا مساوی صفر باشد، پاسخ پلهٔ فیلتر یک تابع غیر نزولی یکنوا است و در نتیجه دارای فراجهش نخواهد بود.

۶-۵۴ به وسیلهٔ یک روش طراحی فیلتر خاص، یک فیلتر پایین‌گذر زمان- پیوستهٔ غیرایده‌آل با پاسخ فرکانسی $H_\circ(j\omega)$، پاسخ ضربهٔ $h_\circ(t)$، و پاسخ پلهٔ $s_\circ(t)$ طراحی شده است. فرکانس قطع فیلتر در $\omega = 2\pi \times 10^2$ رادیان برثانیه است، و زمان صعود پاسخ پله، که به صورت زمان لازم برای آن که پاسخ پله از ۱۰٪ مقدار نهایی به ۹۰٪ مقدار نهایی خود برسد تعریف می‌شود، برابر $\tau_r = 10^{-2}$ ثانیه است. با استفاده از تغییر مقیاس فرکانس، می‌توان از روی این طراحی به فیلتر جدیدی با فرکانس قطع دلخواه ω_c دست یافت. پاسخ فرکانسی فیلتر حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$H_{lp}(j\omega) = H_\circ(ja\omega) ,$$

که درآن a یک ضریب تغییر مقیاس مناسب است.

(الف) ضریب تغییر مقیاس a را طوری تعیین کنید که $H_{lp}(j\omega)$ دارای فرکانس قطع ω_c باشد.

(ب) پاسخ ضربه $h_{lp}(t)$ را برای فیلتر جدید برحسب ω_c و $h_\circ(t)$ تعیین کنید.

(پ) پاسخ پله $s_{lp}(t)$ را برای فیلتر جدید برحسب ω_c و $s_\circ(t)$ تعیین کنید.

(ت) زمان صعود فیلتر جدید را به صورت تابعی از فرکانس قطع آن ω_c تعیین و رسم کنید.

این مثالی از مصالحهٔ بین مشخصه‌های حوزهٔ زمان و حوزهٔ فرکانس می‌باشد. به خصوص، وقتی که فرکانس قطع کاهش می‌یابد، زمان صعود رو به افزایش دارد.

۶-۵۵ توان دوم اندازهٔ پاسخ فرکانسی دسته‌ای از فیلترهای پایین‌گذر زمان- پیوسته، موسوم به فیلترهای باترورث ، به صورت زیر است:

$$|B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2N}}.$$

گیریم که فرکانس لبهٔ باند عبور ω_p را به صورت فرکانسی که در پایین‌تر از آن $|B(j\omega)|^2$ از نصف مقدارش در $\omega = 0$ بزرگتر باشد، تعریف کنیم؛ یعنی:

$$|B(j\omega)|^2 \geq \frac{1}{2}\, |B(j0)|^2 \;, \quad |\omega| < \omega_p.$$

اکنون گیریم که فرکانس لبهٔ باند قطع ω_s را هم به صورت فرکانسی که در بالاتر از آن $|B(j\omega)|$ از 10^{-2} برابر مقدارش در $\omega = 0$ کوچکتر باشد، تقریب بزنیم ؛ یعنی :

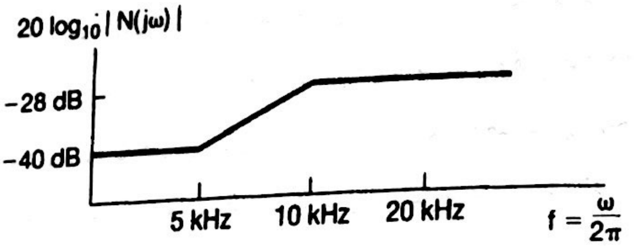
$$|B(j\omega)|^2 \leq 10^{-2} |B(j0)|^2, \quad |\omega| > \omega_s.$$

آنگاه باند گذر برابر محدودهٔ فرکانسی بین ω_p و ω_s است. نسبت ω_s/ω_p را نسبت گذر می‌نامند. به ازای ω_p ثابت، و با تقریب زدنهای منطقی، نسبت گذر را به صورت تابعی از N برای دسته فیلترهای باترورث تعیین و رسم کنید.

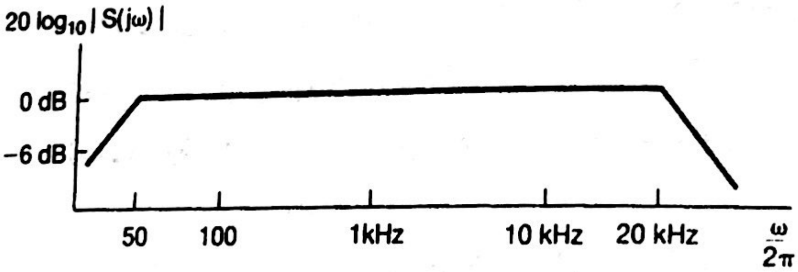
۶-۵۶ در این مسأله به بررسی برخی از موضوعات فیلتر کردن می‌پردازیم که در گونهٔ تجاری یک سیستم نمونه که در اغلب دستگاههای جدید نوار کاست برای کاهش نویز به کار می‌رود، مطرح است. منبع اصلی نویز، صدای هیس فرکانس بالا در هنگام خواندن نوار است که تا حدی ناشی از اصطکاک بین نوار و هِد خواندن می‌باشد. اکنون فرض کنید که نویز هیسی که در هنگام خواندن به سیگنال اضافه می‌شود، برحسب دسی‌بل دارای طیف شکل م۶-۵۶ (الف) باشد که درآن ۰ dB مساوی سطح سیگنال در ۱۰۰Hz است. طیف $S(j\omega)$ برای سیگنال، دارای ترکیب نشان داده شده در شکل م۶-۵۶ (ب) است.

سیستمی را که تحلیل می‌کنیم دارای فیلتر $H_1(j\omega)$ است که سیگنال $s(t)$ را پیش از آن که ضبط شود، در وضع مناسبی قرار می‌دهد. در هنگام خواندن، هیس $n(t)$ به سیگنال اضافه می‌شود. سیستم به صورت طرح واره در شکل م۶-۵۶ (پ) نمایش داده شده است.

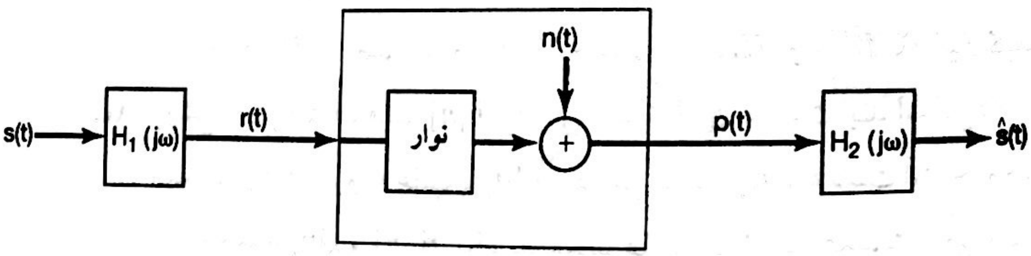
فرض کنید که می‌خواهیم سیستم کل دارای نسبت سیگنال-به-نویز ۴۰dB در محدودهٔ فرکانسی $50\text{Hz} < \omega/2\pi < 20\text{kHz}$ باشد.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل م۶-۵۶

(الف) مشخصهٔ انتقالی فیلتر $H_1(j\omega)$ را تعیین کنید. نمودار بودی $H_1(j\omega)$ را ترسیم نمایید.

(ب) اگر می‌خواستیم به سیگنال $p(t)$ گوش بدهیم، با فرض این‌که فرایند خواندن نوار فقط

موجب افزوده شدن هیس به سیگنال شود، فکر می‌کنید که این سیگنال چگونه شنیده می‌شود؟

(پ) نمودار بودی و مشخصهٔ انتقالی فیلتر $H_2(j\omega)$ باید چگونه باشد تا سیگنال $\hat{s}(t)$ شبیه $s(t)$ شنیده می‌شود؟

۶-۵۷ نشان دهید که اگر پاسخ ضربهٔ یک فیلتر LTI زمان-گسسته، $h[n]$، همواره بزرگتر از یا مساوی صفر باشد، پاسخ پلهٔ فیلتر یک تابع غیرنزولی یکنوا است و در نتیجه دارای فراجهش نخواهد بود.

۶-۵۸ در طراحی فیلترهای آنالوگ یا دیجیتال، اغلب بدون توجه خاصی به فاز، یک مشخصهٔ اندازهٔ تعیین شده تقریب زده می‌شود. به عنوان مثال، روشهای طراحی استاندارد برای فیلترهای پایین‌گذر و میان‌گذر عموماً فقط با توجه به مشخصه‌های اندازه حاصل می‌شوند.

در بسیاری از مسائل فیلتر کردن، در حالت ایده‌آل می‌خواهیم که مشخصه‌های فاز، صفر یا خطی باشند. برای فیلترهای علّی، داشتن فاز صفر غیرممکن است. با وجود این در بسیاری از کاربردهای فیلتر کردن دیجیتال، در صورتی که پردازش نباید به طور بی‌درنگ انجام شود، لزومی ندارد که پاسخ نمونهٔ واحد فیلتر برای $n < 0$ برابر صفر باشد.

یک روش متداول در فیلتر کردن دیجیتال، وقتی داده‌هایی که باید فیلتر شود دارای طول محدود بوده، و به عنوان مثال، روی دیسک یا نوار مغناطیسی ذخیره شده‌اند، این است که داده‌ها ابتدا رو به جلو و سپس رو به عقب با فیلتر یکسانی پردازش شوند.

فرض کنید $h[n]$ پاسخ نمونهٔ واحد یک فیلتر علّی با مشخصهٔ فاز دلخواه باشد. فرض کنید $h[n]$ حقیقی است و تبدیل فوریهٔ آن را با $H(e^{j\omega})$ نشان دهید. همچنین گیریم که $x[n]$ داده‌ای باشد که می‌خواهیم فیلتر کنیم. عملیات فیلتر کردن به شرح زیر انجام می‌شود:

(الف) روش A: $x[n]$ را پردازش کرده و $s[n]$ را به دست آورید، چنان که در شکل م۶-۵۸ (الف) نشان داده شده است.

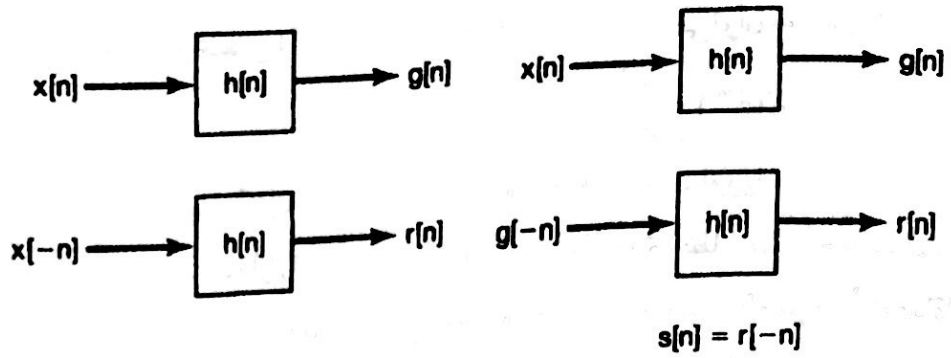
۱- پاسخ نمونهٔ واحد کل $h_1[n]$ را که $x[n]$ و $s[n]$ را به هم مربوط می‌کند، تعیین کنید و نشان دهید که دارای مشخصهٔ فاز صفر است.

۲- $|H_1(e^{j\omega})|$ را تعیین کرده و آن را برحسب $|H(e^{j\omega})|$ و $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ بیان کنید.

(ب) روش B: $x[n]$ را با فیلتر $h[n]$ پردازش کنید تا $g[n]$ به دست آید [شکل م۶-۵۸ (ب)]. همچنین $x[n]$ را رو به عقب با $h[n]$ پردازش کنید تا $r[n]$ به دست آید. خروجی $y[n]$ را برابر مجموع $g[n]$ و $r[-n]$ بگیرید. مجموعهٔ مرکب از این عملیات را می‌توان به وسیلهٔ یک فیلتر با ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$، و پاسخ نمونهٔ واحد $h_2[n]$ نمایش داد.

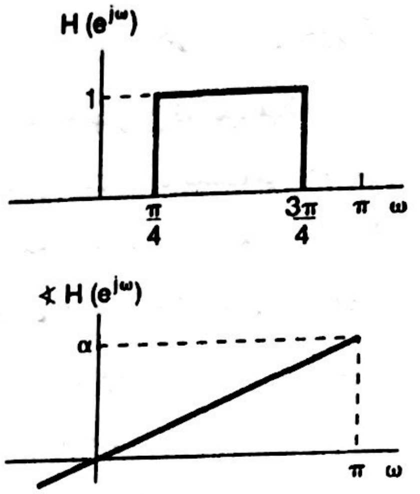
۱- نشان دهید که فیلتر مرکب $h_2[n]$ دارای مشخصهٔ فاز صفر است.

۲- $|H_2(e^{j\omega})|$ را تعیین کرده و آن را برحسب $|H(e^{j\omega})|$ و $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ بیان کنید.



(الف)

(ب)



(پ)

شکل م۶-۵۸

(پ) فرض کنید که دنباله‌ای با طول محدود داریم و می‌خواهیم روی آن عمل فیلتر کردن میان‌گذر با فاز صفر انجام دهیم. علاوه بر این، فرض کنید که فیلتر میان‌گذر $h[n]$ با پاسخ فرکانسی مشخص شده در شکل م۶-۵۸ (پ) داده شده است که دارای مشخصهٔ اندازهٔ مورد نظر بوده، امّا فاز خطی دارد. برای به دست آوردن فاز صفر می‌توان از هر یک از روشهای پیش گفته، A یا B، استفاده کرد. $|H_۱(e^{j\omega})|$ و $|H_۲(e^{j\omega})|$ را تعیین و رسم کنید. با توجه به این نتایج، برای به دست آوردن عمل فیلتر کردن میان‌گذر مطلوب از کدام روش استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید که چرا. در حالت کلی‌تر، اگر $h[n]$ دارای اندازهٔ مورد نظر بوده امّا مشخصهٔ فاز غیرخطی داشته باشد، برای به دست آوردن مشخصهٔ فاز صفر، کدام روش ارجحیت دارد؟

۶-۵۹ فرض کنید که $h_d[n]$ نشان دهندهٔ پاسخ نمونهٔ واحد یک سیستم ایده‌آل مطلوب با پاسخ فرکانسی $H_d(e^{j\omega})$ باشد، و گیریم که $h[n]$ نشان دهندهٔ پاسخ نمونهٔ واحد یک سیستم FIR به طول N و با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ باشد. دراین مسأله نشان می‌دهیم که اگر یک پنجرهٔ مستطیلی با طول N نمونه به $h_d[n]$ اعمال شود، یک پاسخ نمونهٔ واحد $h[n]$ حاصل می‌شود که میانگین توان دوم خطا

$$\varepsilon^۲ = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})|^۲ \, d\omega$$

را حداقل می‌کند.

(الف) تابع خطای $E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$ را می‌توان به صورت سری توانی زیر بیان کرد:

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]\, e^{-j\omega n}.$$

ضرایب $e[n]$ را برحسب $h_d[n]$ و $h[n]$ به دست آورید.

(ب) با استفاده از رابطهٔ پارسوال، میانگین توان دوم خطا ε^2 را بر حسب ضرایب $e[n]$ بیان کنید.

(پ) نشان دهید که برای پاسخ نمونهٔ واحد $h[n]$ با طول N نمونه، ε^2 حداقل می‌شود اگر داشته باشیم:

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

یعنی، برش ساده بهترین تقریب میانگین توان دوم را برای یک پاسخ فرکانسی مطلوب به ازای یک مقدار ثابت N به دست می‌دهد.

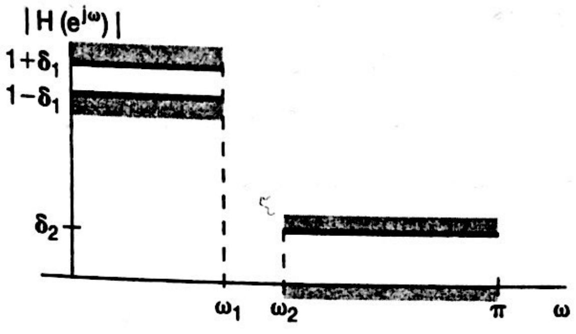
۶-۶۰ در مسألهٔ ۶-۵۰ یک معیار خاص برای تعیین پاسخ فرکانسی یک فیلتر زمان-پیوسته مطرح شد که یک سیگنال را از مجموع دو سیگنال، وقتی که طیف آنها در فرکانس همپوشانی داشته باشد، به دست می‌آورد. برای حالت زمان-گسسته، نتیجه‌ای متناظر با آن چه که در قسمت (ب) از مسألهٔ ۶-۵۰ به دست آمد، ارائه دهید.

۶-۶۱ در بسیاری موارد، یک مدول فیلتر آنالوگ یا دیجیتال، به صورت یک عنصر سخت‌افزاری پایه یا یک زیربرنامهٔ کامپیوتری، در دسترس می‌باشد. با استفاده از این مدول به طور مکرر، یا با ترکیب مدول‌های یکسان، این امکان وجود دارد که فیلتر جدیدی را با مشخصه‌های باند عبور و باند قطع بهتر پیاده‌سازی کنیم. در این مسأله و مسألهٔ بعدی، دو روش را برای انجام این کار مطرح می‌کنیم. اگرچه مطلب برحسب فیلترهای زمان-گسسته بیان می‌شود. عمدهٔ مطالب آن مستقیماً در مورد فیلترهای زمان-پیوسته نیز به کار می‌رود.

یک فیلتر پایین‌گذر با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را در نظر بگیرید که در آن $|H(e^{j\omega})|$ در محدوده‌های تولرانس نشان داده شده در شکل م۶-۶۱ قرار می‌گیرد؛ یعنی:

$$1 - \delta_1 \le H(e^{j\omega}) \le 1 + \delta_1\ ,\quad 0 \le \omega \le \omega_1,$$

$$0 \le |H(e^{j\omega})| \le \delta_2\ ,\quad \omega_2 \le \omega \le \pi\ .$$



شکل م۶-۶۱

فیلتر جدیدی با پاسخ فرکانسی $G(e^{j\omega})$ به صورت اتصال متوالی دو فیلتر یکسان، هر دو با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$، ساخته می‌شود.

(الف) محدوده‌های تولرانس $|G(e^{j\omega})|$ را تعیین کنید.

(ب) با فرض این که $H(e^{j\omega})$ تقریب خوبی از فیلتر پایین‌گذر باشد، به طوری که $\delta_1 \ll 1$ و $\delta_2 \ll 1$، تعیین کنید که آیا ریپل باند عبور $G(e^{j\omega})$ بزرگتر یا کوچکتر از ریپل باند عبور $H(e^{j\omega})$ است. همچنین تعیین کنید که آیا ریپل باند قطع $G(e^{j\omega})$ بزرگتر یا کوچکتر از ریپل باند قطع $H(e^{j\omega})$ است.

(پ) اگر N فیلتر یکسان با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ با هم متوالی شوند تا فیلتر جدیدی با پاسخ فرکانسی $G(e^{j\omega})$ به دست آید، آنگاه بار دیگر با فرض این که $\delta_1 \ll 1$ و $\delta_2 \ll 1$ باشند، محدوده‌های تولرانس تقریبی $|G(e^{j\omega})|$ را تعیین کنید.

۶-۶۲ در مسألهٔ ۶-۶۱ روشی برای استفادهٔ مکرر از یک مدول فیلتر پایه جهت پیاده‌سازی فیلتری جدید با مشخصات بهتر مطرح شد. اکنون روش دیگری را در نظر می‌گیریم که توسط *J. W. Tukey* در کتاب تحلیل داده‌های اکتشافی *(Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1976)* مطرح شد. این روش به صورت دیاگرام بلوکی در شکل م۶-۶۲ (الف) نشان داده شده است.

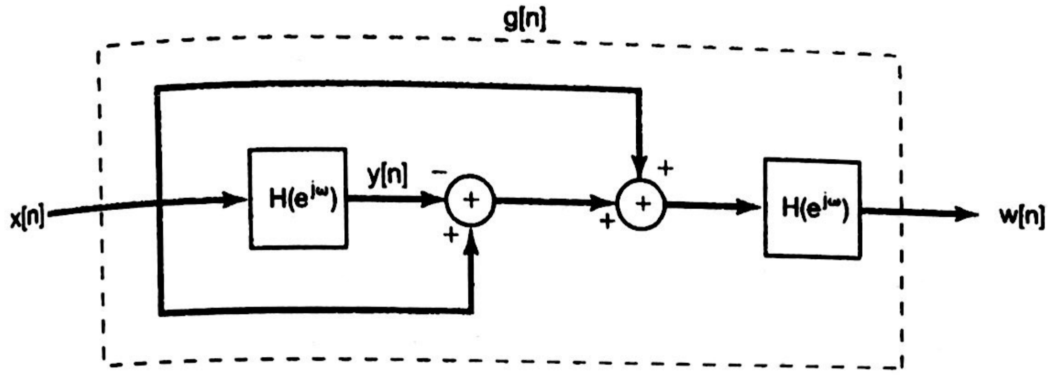
(الف) فرض کنید که $H(e^{j\omega})$ حقیقی بوده و دارای ریپل باند عبور $\pm\delta_1$ و ریپل باند قطع $\pm\delta_2$ باشد (یعنی، $H(e^{j\omega})$ در محدوده‌های تولرانس نشان داده شده در شکل م۶-۶۲ (ب) قرار می‌گیرد). پاسخ فرکانسی $G(e^{j\omega})$ برای سیستم کلی در شکل م۶-۶۲ (الف) در محدوده‌های تولرانس نشان داده شده در شکل م۶-۶۲ (پ) قرار می‌گیرد. A، B، C، و D را بر حسب δ_1 و δ_2 تعیین کنید.

(ب) اگر $\delta_1 \ll 1$ و $\delta_2 \ll 1$ باشند، ریپل‌های تقریبی باند عبور و باند قطع مربوط به $G(e^{j\omega})$ برابر چیست؟ به خصوص نشان دهید که آیا ریپل باند عبور در $G(e^{j\omega})$ بزرگتر یا کوچکتر از ریپل باند عبور در $H(e^{j\omega})$ است. همچنین مشخص کنید که آیا ریپل باند قطع $G(e^{j\omega})$ بزرگتر یا کوچکتر از ریپل باند قطع $H(e^{j\omega})$ است.

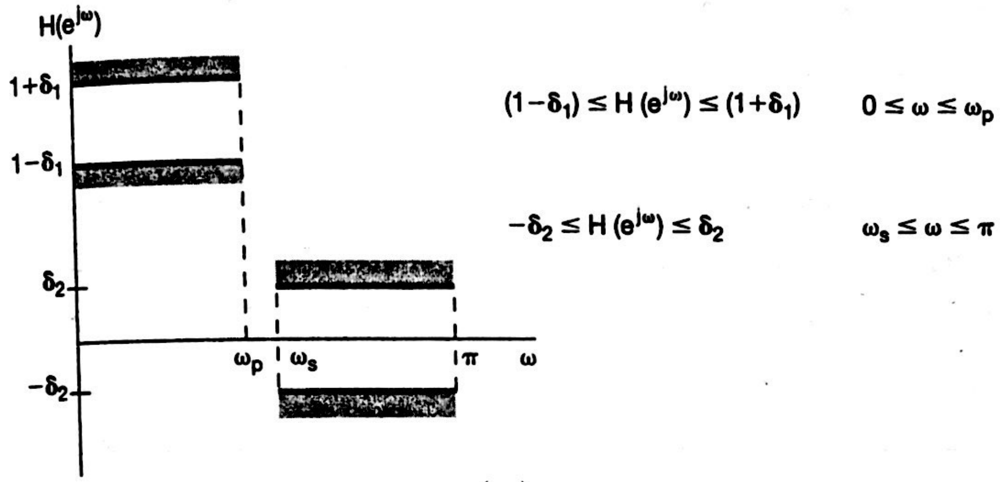
(پ) در قسمتهای (الف) و (ب) فرض کردیم که $H(e^{j\omega})$ حقیقی است. اکنون فرض کنید که $H(e^{j\omega})$ دارای صورت کلی زیر باشد:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\, e^{j\theta(\omega)},$$

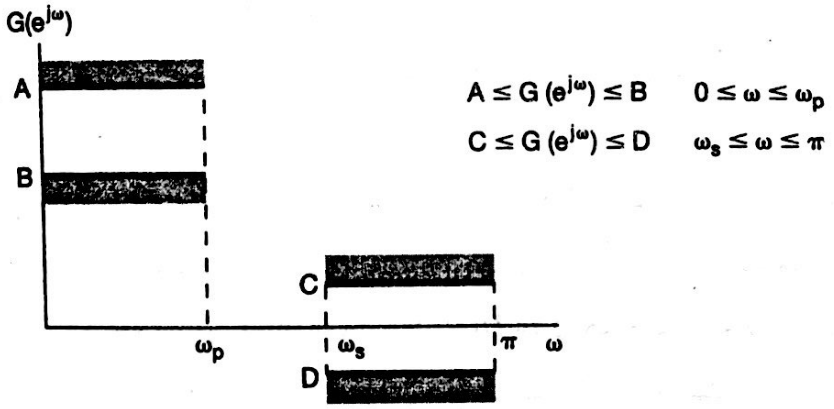
که در آن $H_1(e^{j\omega})$ حقیقی است و $\theta(\omega)$ یک مشخصهٔ فاز نامشخص است. اگر $|H(e^{j\omega})|$ تقریب مناسبی از فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل باشد، آیا $|G(e^{j\omega})|$ لزوماً تقریب مناسبی از فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل خواهد بود؟



(الف)



(ب)



(پ)

شکل م۶-۶۲

(ت) اکنون فرض کنید که $H(e^{j\omega})$ یک فیلتر پایین‌گذر FIR با فاز خطی باشد، به طور که:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})\, e^{jM\omega},$$

که در آن $H_1(e^{j\omega})$ حقیقی و M عددی صحیح است. نشان دهید که چگونه باید سیستم در شکل م۶-۶۲ (الف) را اصلاح کرد تا سیستم کلی یک فیلتر پایین‌گذر را تقریب بزند.

۶-۶۳ در طراحی فیلترهای دیجیتال، اغلب فیلتری با مشخصهٔ اندازهٔ تعیین شده انتخاب می‌کنیم که دارای

کوتاه‌ترین طول باشد. یعنی، پاسخ ضربه که عکس تبدیل فوریهٔ طیف فرکانسی مختلط است، باید تا حد ممکن باریک باشد. با فرض این که $h[n]$ حقیقی است، می‌خواهیم نشان دهیم که اگر فاز $\theta(\omega)$ مربوط به پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ برابر صفر باشد، طول پاسخ ضربه حداقل خواهد بود. فرض کنید پاسخ فرکانسی به صورت زیر بیان شود:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \; e^{j\theta(\omega)} ,$$

و گیریم که کمیت

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 h^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nh[n])^2$$

را به عنوان معیاری از طول پاسخ ضربهٔ $h[n]$ مربوطه در نظر بگیریم.

(الف) با استفاده از خاصیت مشتق‌گیری تبدیل فوریه و رابطهٔ پارسوال، D را بر حسب $H(e^{j\omega})$ بیان کنید.

(ب) با بیان $H(e^{j\omega})$ برحسب اندازه $|H(e^{j\omega})|$ و فاز آن $\theta(\omega)$، از نتیجهٔ خود در قسمت (الف) استفاده کرده و نشان دهید که وقتی $\theta(\omega) = 0$ باشد، D حداقل می‌شود.

۶-۶۴ برای آن که یک فیلتر زمان-گسسته علّی بوده و فاز دقیقاً خطی داشته باشد، پاسخ ضربهٔ آن باید دارای طول محدود باشد و در نتیجه معادلهٔ تفاضلی باید غیربازگشتی باشد. به منظور تأکید بر بینشی که در پشت این عبارت وجود دارد، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که درآن شیب مشخصهٔ فاز خطی عدد صحیحی باشد. بدین ترتیب، پاسخ فرکانسی به صورت زیر فرض می‌شود:

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega})\; e^{-jM\omega}, \; -\pi < \omega < \pi \qquad (\text{م}۶-۶۴-۱)$$

که درآن $H_r(e^{j\omega})$ حقیقی و زوج است.

فرض کنید $h[n]$ نشان دهندهٔ پاسخ ضربهٔ فیلتر با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ و $h_r[n]$ نشان دهندهٔ پاسخ ضربهٔ فیلتر با پاسخ فرکانسی $H_r(e^{j\omega})$ باشد.

(الف) با استفاده از خواص مناسب در جدول ۵-۱، نشان دهید که:

۱- $h_r[n] = h_r[-n]$ (یعنی، $h_r[n]$ حول $n = 0$ متقارن است).

۲- $h[n] = h_r[n - M]$.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ خود در قسمت (الف)، نشان دهید که با $H(e^{j\omega})$ به صورت داده شده در معادلهٔ (م۶-۶۴-۱)، $h[n]$ حول $n = M$ متقارن است؛ یعنی:

$$h[M + n] = h[M - n]. \qquad (\text{م}۶-۶۴-۲)$$

(پ) بنا بر نتیجهٔ قسمت (ب)، مشخصهٔ فاز خطی در معادلهٔ (م۶-۶۴-۱) تقارنی را بر پاسخ ضربه تحمیل می‌کند. نشان دهید که اگر $h[n]$ علّی بوده و دارای تقارن در معادلهٔ

(م۶-۶۴-۲) باشد، آنگاه:

$$h[n] = 0, \quad n > 2M \;\; \text{و} \;\; n < 0 \;\; \text{برای}$$

(یعنی $h[n]$ باید دارای طول محدود باشد).

۶-۶۵ برای دسته‌ای از فیلترهای پایین‌گذر زمان-گسسته، موسوم به فیلترهای باتروورث، توان دوم اندازهٔ پاسخ فرکانسی به صورت زیر می‌باشد:

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\tan(\omega/2)}{\tan(\omega_c/2)}\right)^{2N}},$$

که درآن ω_c فرکانس قطع است (که آن را برابر $\pi/2$ در نظر خواهیم گرفت) و N مرتبهٔ فیلتر می‌باشد (که آن را برابر $N = 1$ در نظر خواهیم گرفت). بدین ترتیب، داریم:

$$|B(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{1 + \tan^2(\omega/2)}.$$

(الف) با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، نشان دهید که $|B(e^{j\omega})|^2 = \cos^2(\omega/2)$ است.

(ب) فرض کنید $B(e^{j\omega}) = a\cos(\omega/2)$ باشد. به ازای چه مقدار مختلط a، $|B(e^{j\omega})|^2$ همانند قسمت (الف) خواهد بود؟

(پ) نشان دهید که $B(e^{j\omega})$ در قسمت (ب) برابر تابع تبدیل متناظر با یک معادلهٔ تفاضلی به صورت زیر است:

$$y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-\gamma]$$

α، β، و γ را تعیین کنید.

۶-۶۶ در شکل م۶-۶۶ (الف) سیستم زمان-گسسته‌ای متشکل از ترکیب موازی N فیلتر LTI با پاسخهای ضربهٔ $h_k[n]$، $k = 0, 1, \ldots, N-1$، نشان داده شده است. برای هر k، $h_k[n]$ با عبارت زیر به $h_0[n]$ مربوط می‌شود:

$$h_k[n] = e^{j(2\pi nk/N)}\, h_0[n].$$

(الف) اگر $h_0[n]$ یک فیلتر پایین‌گذر زمان-گسسته با پاسخ فرکانسی $H_0(e^{j\omega})$ باشد که در شکل م۶-۶۶ (ب) نشان داده شده است، تبدیلهای فوریهٔ $h_1[n]$ و $h_{N-1}[n]$ را برای ω در محدودهٔ $-\pi < \omega \le +\pi$ ترسیم کنید.

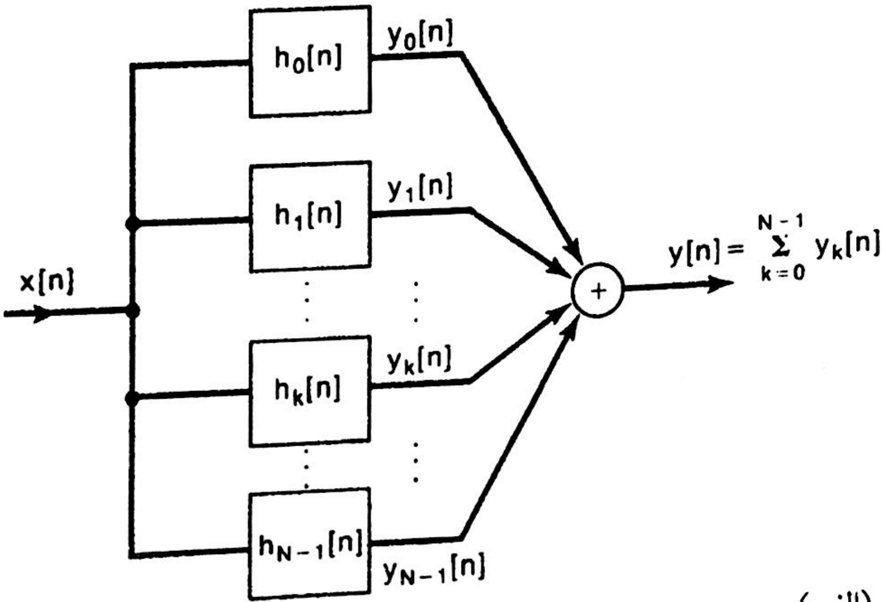
(ب) مقدار فرکانس قطع ω_c $(0 < \omega_c \le \pi)$ در شکل م۶-۶۶ (ب) را برحسب N چنان تعیین کنید که سیستم شکل م۶-۶۶ (الف) یک سیستم همانی باشد؛ یعنی برای تمام nها و هر ورودی $x[n]$، داشته باشیم $y[n] = x[n]$.

(پ) فرض کنید که $h_0[n]$ دیگر به صورت یک فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل محدود نشده باشد. اگر $h[n]$ نشان‌دهندهٔ پاسخ ضربهٔ سیستم کلی در شکل م۶-۶۶ (الف) با ورودی $x[n]$ باشد، آنگاه می‌توان $h[n]$ را به صورت زیر بیان کرد:

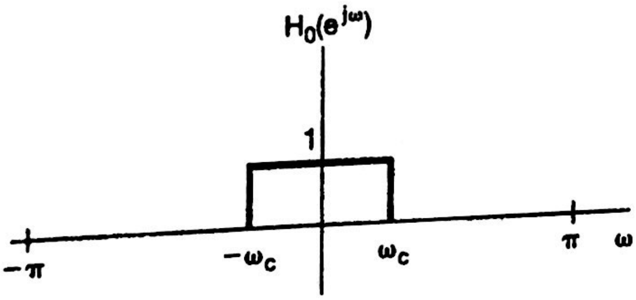
$$h[n] = r[n]\, h_\circ[n].$$

$r[n]$ را تعیین و رسم کنید.

(ت) با توجه به نتیجهٔ خود در قسمت (پ)، یک شرط لازم و کافی روی $h_\circ[n]$ چنان تعیین کنید تا تضمین نماید که سیستم کلی یک سیستم همانی می‌شود (یعنی، برای هر ورودی $x[n]$، خروجی $y[n]$ با $x[n]$ یکسان خواهد بود). جواب شما نباید شامل هیچ مجموعی باشد.



(الف)



(ب)

شکل م۶-۶۶