مسائل فصل ۵

بخش نخست از مسائل به مباحث پایه‌ای تعلق دارد و جوابهای آنها در انتهای کتاب ارائه شده است. سه بخش بعدی شامل مسائلی هستند که به ترتیب به مباحث پایه‌ای، پیشرفته، و تعمیمی تعلق دارند.

مسائل پایه‌ای با جواب

۵-۱ از معادلهٔ تحلیل تبدیل فوریه (۵-۹) استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $(\frac{۱}{۲})^{n-۱}u[n-۱]$ **(ب)** $(\frac{۱}{۲})^{|n-۱|}$

نمودار اندازهٔ هر تبدیل فوریه را برای یک دورهٔ تناوب ترسیم و مدرج کنید.

۵-۲ از معادلهٔ تحلیل تبدیل فوریه (۵-۹) استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\delta[n-۱]+\delta[n+۱]$ **(ب)** $\delta[n+۲]-\delta[n-۲]$

نمودار اندازهٔ هر تبدیل فوریه را برای یک دورهٔ تناوب ترسیم و مدرج کنید.

۳-۵ در مورد هر یک از سیگنال‌های متناوب زیر، تبدیل فوریه را برای $-\pi \le \omega < \pi$ تعیین کنید:

(الف) $\sin(\frac{\pi}{۳}n + \frac{\pi}{۴})$ (ب) $۲ + \cos(\frac{\pi}{۶}n + \frac{\pi}{۸})$

۴-۵ از معادلهٔ ترکیب تبدیل فوریه (۵-۸) استفاده کرده و عکس تبدیلهای فوریهٔ زیر را تعیین کنید:

(الف) $X_۱(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{۲\pi\delta(\omega - ۲\pi k) + \pi\delta(\omega - \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k) + \pi\delta(\omega + \frac{\pi}{۲} - ۲\pi k)\}$

(ب) $$X_۲(e^{j\omega}) = \begin{cases} ۲j, & ۰ < \omega \le \pi \\ -۲j, & -\pi < \omega \le ۰ \end{cases}$$

۵-۵ از معادلهٔ ترکیب تبدیل فوریه (۵-۸) استفاده کرده و عکس تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|e^{j\sphericalangle X(e^{j\omega})}$ زیر را تعیین کنید:

$$|X(e^{j\omega})| = \begin{cases} ۱, & ۰ \le |\omega| < \frac{\pi}{۴} \\ ۰, & \frac{\pi}{۴} \le |\omega| \le \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad \sphericalangle X(e^{j\omega}) = -\frac{۳\omega}{۲}.$$

از جواب خود استفاده کرده و مقادیری از n را که به ازای آنها $x[n] = ۰$ است، تعیین کنید.

۶-۵ با فرض این که $x[n]$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ است، تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان کنید. از خواص تبدیل فوریه که در جدول ۵-۱ درج شده‌اند، می‌توانید استفاده کنید.

(الف) $x_۱[n] = x[۱ - n] + x[-۱ - n]$

(ب) $x_۲[n] = \frac{x^*[-n] + x[n]}{۲}$ (پ) $x_۳[n] = (n - ۱)^۲ x[n]$

۷-۵ برای هر یک از تبدیلهای فوریهٔ زیر، از خواص تبدیل فوریه (جدول ۵-۱) استفاده کرده و تعیین کنید که آیا سیگنال حوزهٔ زمانی متناظر (۱) حقیقی، موهومی، یا هیچکدام و (۲) زوج، فرد، یا هیچکدام است. این کار را بدون محاسبهٔ عکس هر یک از تبدیلهای داده شده، انجام دهید.

(الف) $X_۱(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}\sum_{k=۱}^{۱۰}(\sin k\omega)$

(ب) $X_۲(e^{j\omega}) = j\sin(\omega)\cos(۵\omega)$

(پ) $X_۳(e^{j\omega}) = A(\omega) + e^{jB(\omega)}$، که در آن:

$$A(\omega) = \begin{cases} ۱, & ۰ \le |\omega| \le \frac{\pi}{۸} \\ ۰, & \frac{\pi}{۸} < |\omega| \le \pi \end{cases} \quad \text{و} \quad B(\omega) = -\frac{۳\omega}{۲} + \pi.$$

۸-۵ با استفاده از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲، $x[n]$ را چنان تعیین کنید که تبدیل فوریهٔ آن به صورت زیر باشد:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{۱}{۱ - e^{-j\omega}}\left(\frac{\sin\frac{۳}{۲}\omega}{\sin\frac{\omega}{۲}}\right) + ۵\pi\delta(\omega), \quad -\pi < \omega \le \pi$$

۵-۹ در مورد سیگنال به خصوص $x[n]$ با تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ چهار ویژگی زیر داده شده است:

۱- برای $n > 0$ ، $x[n] = 0$.

۲- $x[0] > 0$.

۳- $\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = \sin\omega - \sin 2\omega$.

۴- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 3$.

$x[n]$ را تعیین کنید.

۵-۱۰ از جدولهای ۵-۱ و ۵-۲ به همراه این واقعیت که:

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

استفاده کرده و مقدار عددی عبارت زیر را تعیین کنید:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

۵-۱۱ سیگنال $g[n]$ با تبدیل فوریهٔ $G(e^{j\omega})$ را درنظر بگیرید. فرض کنید:

$$g[n] = x_{(2)}[n],$$

که در آن سیگنال $x[n]$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ است. عدد حقیقی α را چنان تعیین کنید که $0 < \alpha < 2\pi$ و $G(e^{j\omega}) = G(e^{j(\omega-\alpha)})$ باشد.

۵-۱۲ فرض کنید:

$$y[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2 * \left(\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}\right),$$

که $*$ نشان دهندهٔ کانولوشن بوده و $|\omega_c| \le \pi$ است. محدودیت دقیقتری روی ω_c چنان تعیین کنید که لزوماً داشته باشیم:

$$y[n] = \left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}n}{\pi n}\right)^2.$$

۵-۱۳ یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h_1[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ به طور موازی به یک سیستم LTI علّی دیگر با پاسخ ضربهٔ $h_2[n]$ متصل شده است. بهم پیوستن موازی حاصل دارای پاسخ فرکانسی زیر است:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-12 + 5e^{-j\omega}}{12 - 7e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}}.$$

$h_2[n]$ را تعیین کنید.

۵-۱۴ فرض کنید که اطلاعات زیر در بارهٔ سیستم LTI ی S با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ داده شده است:

۱- $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \longrightarrow g[n]$ ، که در آن برای $n \ge 2$ و $n < 0$ ، $g[n] = 0$ است.

۲- $H(e^{j\pi/2}) = 1$

۳- $H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega-\pi)})$

$h[n]$ را تعیین کنید.

۵-۱۵ گیریم که عکس تبدیل فوریهٔ $Y(e^{j\omega})$ به صورت زیر باشد:

$$y[n] = \left(\frac{\sin \omega_c n}{\pi n}\right)^{۲},$$

که در آن $۰ < \omega_c < \pi$ است. مقدار ω_c را چنان تعیین کنید که لزوماً داشته باشیم:

$$Y(e^{j\pi}) = \frac{۱}{۲}.$$

۱۶-۵ تبدیل فوریهٔ سیگنال به خصوصی به صورت زیر است:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=۰}^{۳} \frac{(۱/۲)^k}{۱ - \frac{۱}{۴} e^{-j(\omega - \pi/۲k)}}.$$

می‌توان نشان داد که :

$$x[n] = g[n]q[n],$$

که در آن $g[n]$ به شکل $\alpha^n u[n]$ بوده و $q[n]$ سیگنال متناوبی با دورهٔ تناوب N است.

(الف) مقدار α را تعیین کنید.

(ب) مقدار N را تعیین کنید.

(پ) آیا $x[n]$ حقیقی است؟

۱۷-۵ سیگنال $x[n] = (-۱)^n$ دارای دورهٔ تناوب اصلی ۲ و ضرایب سری فوریهٔ متناظر a_k است. از دوگانی استفاده کرده و ضرایب سری فوریهٔ b_k را برای سیگنال $g[n] = a_n$ با دورهٔ تناوب اصلی ۲ تعیین کنید.

۱۸-۵ با توجه به این واقعیت که :

$$a^{|n|} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{۱ - a^{۲}}{۱ - ۲a\cos\omega + a^{۲}}, \quad |a| < ۱,$$

از دوگانی استفاده کرده و ضرایب سری فوریهٔ سیگنال زمان-پیوستهٔ زیر با دورهٔ تناوب $T = ۱$ را به دست آورید:

$$x(t) = \frac{۱}{۵ - ۴\cos(۲\pi t)}.$$

۱۹-۵ سیستم LTI علّی و پایدار S راکه ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن از طریق معادلهٔ تفاضلی مرتبهٔ دوم زیر به هم مربوط می‌شوند، درنظر بگیرید:

$$y[n] - \frac{۱}{۶} y[n - ۱] - \frac{۱}{۶} y[n - ۲] = x[n].$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را برای سیستم S تعیین کنید.

(ب) پاسخ ضربهٔ $h[n]$ را برای سیستم S تعیین کنید.

۲۰-۵ سیستم LTI علّی و پایدار S دارای این خاصیت است که :

$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^n u[n] \longrightarrow n\left(\frac{۴}{۵}\right)^n u[n]$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را برای سیستم S تعیین کنید.

(ب) معادلهٔ تفاضلی‌ای راکه هر ورودی $x[n]$ را به خروجی متناظر $y[n]$ مرتبط می‌سازد، به دست آورید.

مسائل پایه‌ای

۵-۲۱ تبدیل فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $x[n] = u[n-۲] - u[n-۶]$

(ب) $x[n] = (\frac{۱}{۲})^{-n}u[-n-۱]$

(پ) $x[n] = (\frac{۱}{۳})^{|n|}u[-n-۲]$

(ت) $x[n] = ۲^n\sin(\frac{\pi}{۴}n)u[-n]$

(ث) $x[n] = (\frac{۱}{۲})^{|n|}\cos(\frac{\pi}{۸}(n-۱))$

(ج) $x[n] = \begin{cases} n, & -۳ \le n \le ۳ \\ ۰, & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$

(چ) $x[n] = \sin(\frac{\pi}{۲}n) + \cos(n)$

(ح) $x[n] = \sin(\frac{۵\pi}{۳}n) + \cos(\frac{۷\pi}{۳}n)$

(خ) $x[n] = x[n-۶]$، و $x[n] = u[n] - u[n-۵]$ برای $۰ \le n \le ۵$

(د) $x[n] = (n-۱)(\frac{۱}{۳})^{|n|}$

(ذ) $x[n] = (\frac{\sin(\pi n/۵)}{\pi n})\cos(\frac{۷\pi}{۲}n)$

۵-۲۲ عبارتهای زیر تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زمان-گسسته هستند. سیگنال متناظر با هر تبدیل را تعیین کنید.

(الف) $X(e^{j\omega}) = \begin{cases} ۱, & \frac{\pi}{۴} \le |\omega| \le \frac{۳\pi}{۴} \\ ۰, & \frac{۳\pi}{۴} < |\omega| \le \pi\,,\ ۰ \le |\omega| < \frac{\pi}{۴} \end{cases}$

(ب) $X(e^{j\omega}) = ۱ + ۳e^{-j\omega} + ۲e^{-j۲\omega} - ۴e^{-j۳\omega} + e^{-j۱۰\omega}$

(پ) $X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega/۲}\ ,\quad -\pi \le \omega \le \pi$ برای

(ت) $X(e^{j\omega}) = \cos^۲\omega + \sin^۲ ۳\omega$

(ث) $X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-۱)^k\delta(\omega - \frac{\pi}{۲}k)$

(ج) $X(e^{j\omega}) = \dfrac{e^{-j\omega} - \frac{۱}{۵}}{۱ - \frac{۱}{۵}e^{-j\omega}}$

(چ) $X(e^{j\omega}) = \dfrac{۱ - \frac{۱}{۳}e^{-j\omega}}{۱ - \frac{۱}{۴}e^{-j\omega} - \frac{۱}{۸}e^{-۲j\omega}}$

(ح) $X(e^{j\omega}) = \dfrac{۱ - (\frac{۱}{۳})^۶ e^{-j۶\omega}}{۱ - \frac{۱}{۳}e^{-j\omega}}$

۵-۲۳ فرض کنید که $X(e^{j\omega})$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ سیگنال $x[n]$ ترسیم شده در شکل م۵-۲۳ باشد. محاسبات زیر را بدون محاسبهٔ صریح $X(e^{j\omega})$ انجام دهید:

(الف) $X(e^{j۰})$ را محاسبه کنید.

(ب) $\measuredangle X(e^{j\omega})$ را بیابید.

(پ) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$ را محاسبه کنید.

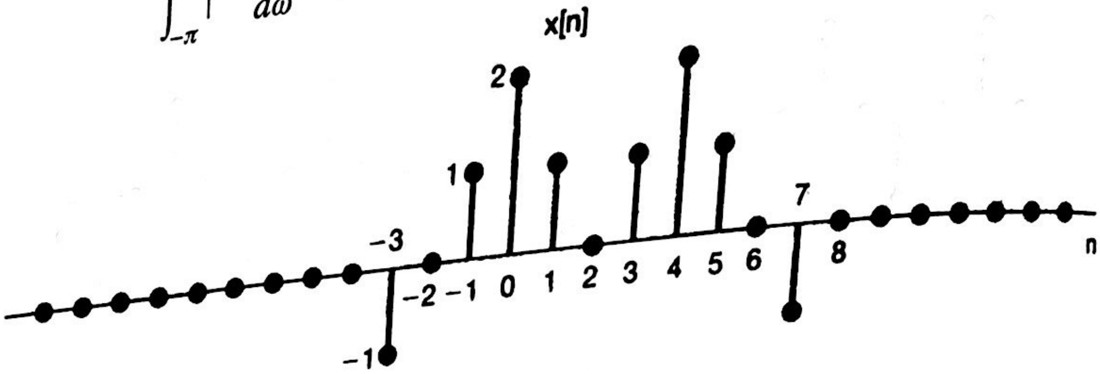
(ت) $X(e^{j\pi})$ را بیابید.

(ث) سیگنالی راکه تبدیل فوریهٔ آن برابر $\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$ می‌باشد، تعیین و رسم کنید.

(ج) عبارتهای زیر را محاسبه کنید:

(۱) $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^{2} d\omega$

(۲) $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}\right|^{2} d\omega$



شکل م۵-۲۳

۵-۲۴ تعیین کنید که کدام یک، اگر موجود باشد، از سیگنال‌های زیر دارای تبدیل فوریه‌ای هستند که در هر یک از شرایط زیر صدق می‌کند:

۱- $\mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\} = 0$.

۲- $\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\} = 0$.

۳- یک αی حقیقی وجود دارد به طوری که $e^{j\alpha\omega} X(e^{j\omega})$ حقیقی است.

۴- $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 0$.

۵- $X(e^{j\omega})$ متناوب.

۶- $X(e^{j0}) = 0$.

(الف) $x[n]$ به صورت شکل م۵-۲۴ (الف)

(ب) $x[n]$ به صورت شکل م۵-۲۴ (ب)

(پ) $x[n] = (\frac{1}{2})^{n} u[n]$

(ت) $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$

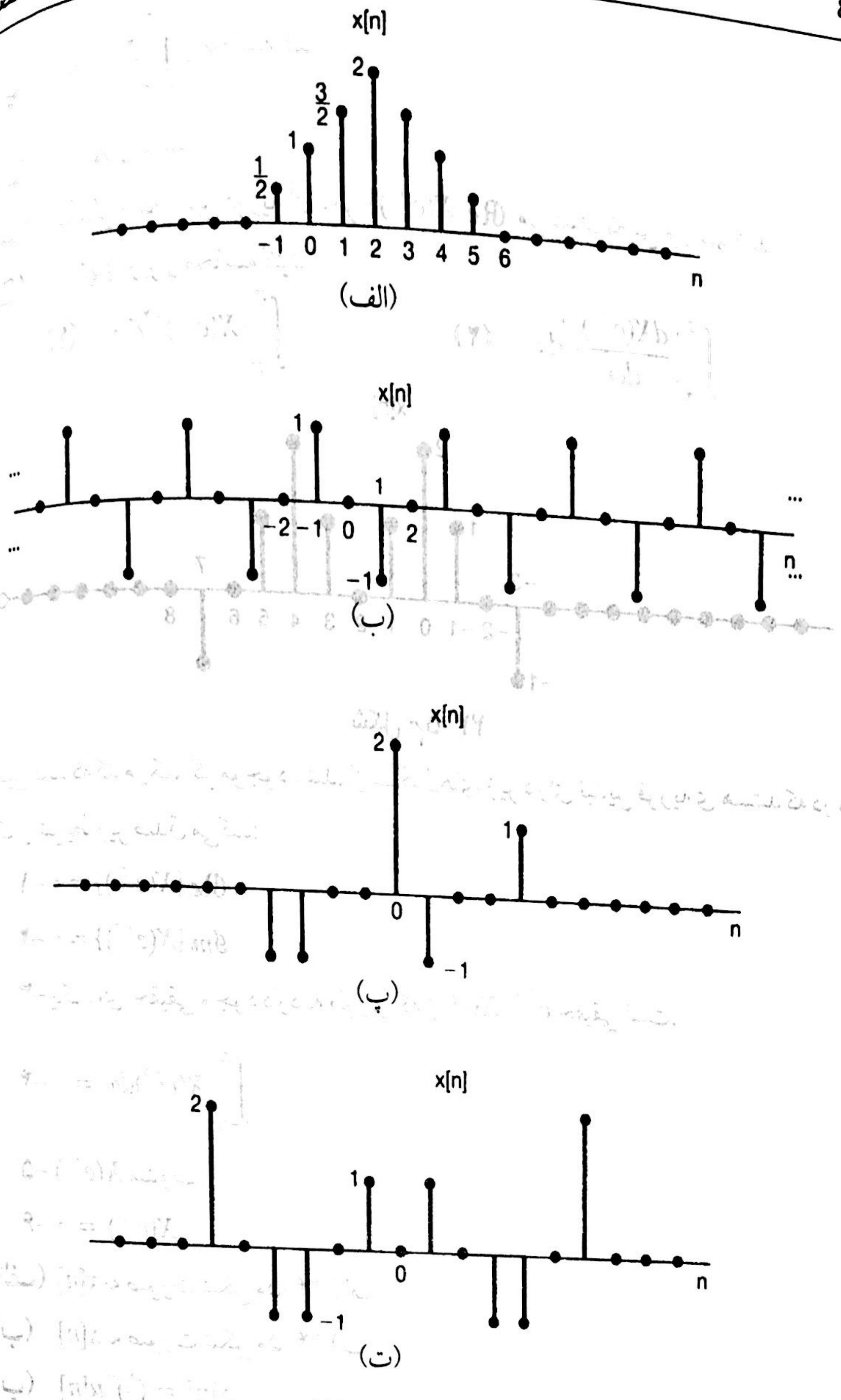
(ث) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+2]$

(ج) $x[n] = \delta[n-1] + \delta[n+3]$

(چ) $x[n]$ به صورت شکل م۵-۲۴ (پ)

(ح) $x[n]$ به صورت شکل م۵-۲۴ (ت)

(خ) $x[n] = \delta[n-1] - \delta[n+1]$



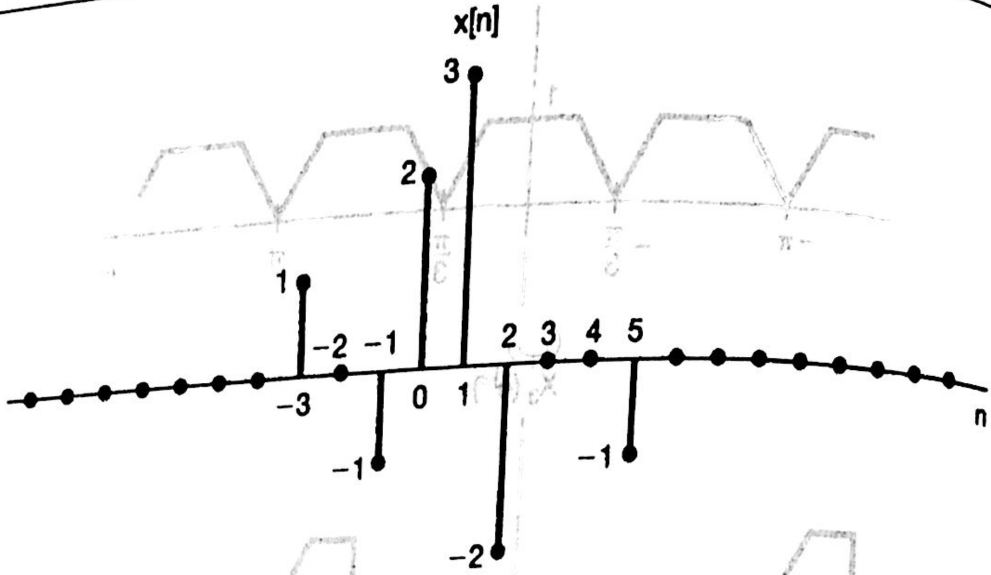
شکل م۵-۲۴

۲۵-۵ سیگنال ترسیم شده در شکل م۵-۲۵ را درنظر بگیرید. فرض کنید که تبدیل فوریهٔ این سیگنال به صورت مستطیلی نوشته شود:

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega) + jB(\omega).$$

تابع زمانی متناظر با تبدیل زیر را ترسیم کنید:

$$Y(e^{j\omega}) = [B(\omega) + A(\omega)e^{j\omega}].$$



شکل م۵-۲۵

۵-۲۶ فرض کنید که $x_1[n]$ سیگنال زمان-گسسته‌ای باشد که تبدیل فوریهٔ آن $X_1(e^{j\omega})$ در شکل م۵-۲۶ (الف) نشان داده شده است.

(الف) سیگنال $x_2[n]$ را با تبدیل فوریهٔ $X_2(e^{j\omega})$، چنان که در شکل م ۵-۲۶ (ب) تصویر شده است، درنظربگیرید. $x_2[n]$ را برحسب $x_1[n]$ بیان کنید. [راهنمایی: ابتدا $X_2(e^{j\omega})$ را برحسب $X_1(e^{j\omega})$ بیان کرده و سپس از خواص تبدیل فوریه استفاده کنید.]

(ب) قسمت (الف) را برای $x_3[n]$ با تبدیل فوریهٔ $X_3(e^{j\omega})$ به صورت نشان داده شده در شکل م۵-۲۶ (پ) تکرار کنید.

(پ) فرض کنید:

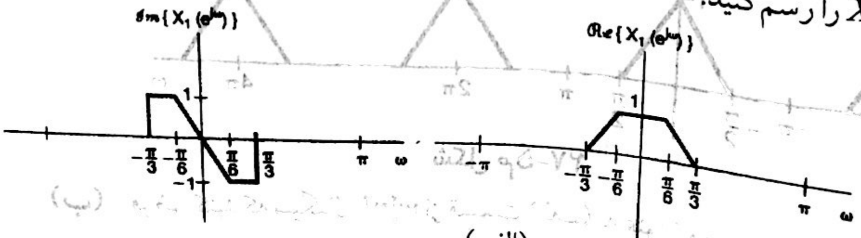
$$\alpha = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x_1[n]}{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n]}.$$

این کمیت را که مرکز ثقل سیگنال $x_1[n]$ است، معمولاً زمان تأخیر $x_1[n]$ می‌نامند. α را بیابید. (این کار را می‌توانید بدون آن که ابتدا $x_1[n]$ را صریحاً تعیین کنید، انجام دهید.)

(ت) سیگنال $x_4[n] = x_1[n] * h[n]$ را درنظر بگیرید که در آن:

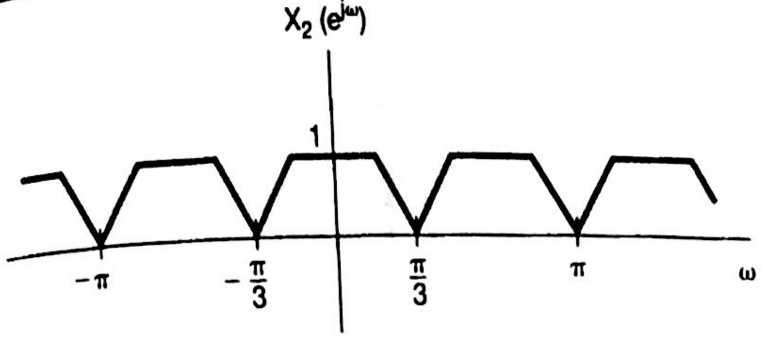
$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/6)}{\pi n}.$$

$X_4(e^{j\omega})$ را رسم کنید.

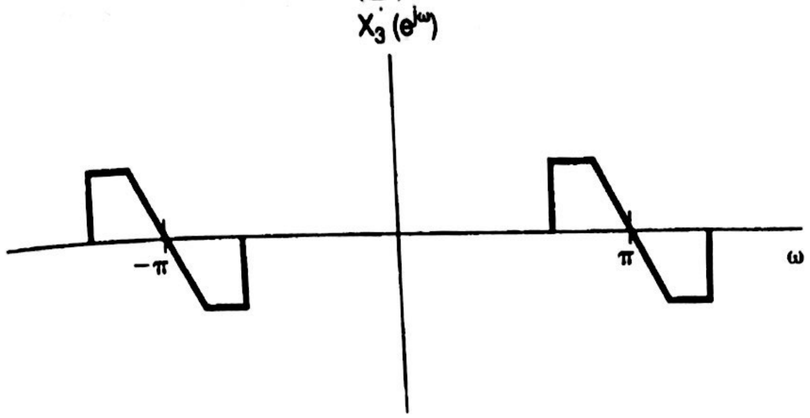


(الف)

شکل م۵-۲۶ (الف)



(ب)



(پ)

شکل م۵-۲۶ (ب) و (پ)

۵-۲۷ (الف) فرض کنید $x[n]$ سیگنال زمان-گسسته‌ای با تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ باشد که در شکل م۵-۲۷ تصویر شده است. تبدیل فوریهٔ

$$w[n] = x[n]p[n]$$

را برای هر یک از سیگنال‌های $p[n]$ زیر ترسیم کنید:

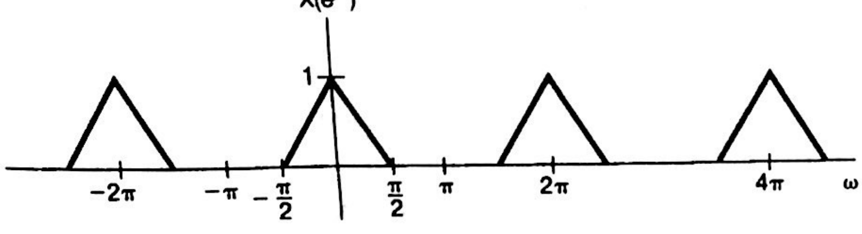
(۱) $p[n] = \cos\pi n$

(۲) $p[n] = \cos(\pi n/۲)$

(۳) $p[n] = \sin(\pi n/۲)$

(۴) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - ۲k]$

(۵) $p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - ۴k]$



شکل م۵-۲۷

(ب) فرض کنید که سیگنال $w[n]$ از قسمت (الف) به عنوان ورودی به یک سیستم LTI با پاسخ نمونهٔ واحد زیر اعمال شده است:

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}.$$

برای هر یک از انتخابهای $p[n]$ در قسمت (الف)، خروجی $y[n]$ را تعیین کنید.

۵-۲۸ می‌دانیم که سیگنال‌های $x[n]$ و $g[n]$ به ترتیب دارای تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ و $G(e^{j\omega})$ هستند. علاوه براین، $X(e^{j\omega})$ و $G(e^{j\omega})$ به صورت زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} X(e^{j\theta})G(e^{j(\omega-\theta)})d\theta = 1 + e^{-j\omega} \qquad \text{(م۵-۲۸-۱)}$$

(الف) اگر $x[n] = (-1)^n$ باشد، یک دنبالهٔ $g[n]$ چنان تعیین کنید که تبدیل فوریهٔ آن $G(e^{j\omega})$ در معادلهٔ (م۵-۲۸-۱) صدق کند. آیا جوابهای ممکن دیگری برای $g[n]$ وجود دارد؟

(ب) قسمت قبل را برای $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ تکرار کنید.

۵-۲۹ (الف) یک سیستم LTI زمان‌ـگسسته با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n].$$

از تبدیل فوریه استفاده کرده و پاسخ به هر یک از سیگنال‌های ورودی زیر را به دست آورید:

(۱) $x[n] = (\frac{3}{4})^n u[n]$

(۲) $x[n] = (n+1)(\frac{1}{4})^n u[n]$

(۳) $x[n] = (-1)^n$

(ب) فرض کنید که:

$$h(t) = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right] u[n].$$

از تبدیل فوریه استفاده کرده و پاسخ به هر یک از ورودیهای زیر را به دست آورید:

(۱) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(۲) $x[n] = \cos(\pi n/2)$

(پ) فرض کنید $x[n]$ و $h[n]$ سیگنال‌هایی با تبدیلهای فوریهٔ زیر باشند:

$$X(e^{j\omega}) = 3e^{j\omega} + 1 - e^{-j\omega} + 2e^{-j3\omega},$$

$$H(e^{j\omega}) = -e^{j\omega} + 2e^{-j2\omega} + e^{j4\omega}.$$

$y[n] = x[n] * h[n]$ را به دست آورید.

۵-۳۰ در فصل ۴ خاطر نشان کردیم که سیستم LTI زمان‌ـپیوسته با پاسخ ضربهٔ

$$h(t) = \frac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right) = \frac{\sin Wt}{\pi t}$$

نقش بسیار مهمی در تحلیل سیستم LTI ایفا می‌کند. این مطلب درمورد سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ زیر نیز صادق است:

$$h[n] = \frac{W}{\pi}\,\text{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right) = \frac{\sin Wn}{\pi n}.$$

(الف) پاسخ فرکانسی را برای سیستم با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ تعیین و رسم کنید.

(ب) سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{۸}\right) - ۲\cos\left(\frac{\pi n}{۴}\right).$$

فرض کنید که این سیگنال ورودی سیستم‌های LTI با پاسخهای ضربهٔ زیر است. در هر مورد خروجی را به دست آورید.

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/۶)}{\pi n} \qquad (۱)$$

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/۶)}{\pi n} + \frac{\sin(\pi n/۲)}{\pi n} \qquad (۲)$$

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/۶)\,\sin(\pi n/۳)}{\pi^۲ n^۲} \qquad (۳)$$

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/۶)\,\sin(\pi n/۳)}{\pi n} \qquad (۴)$$

(پ) یک سیستم LTI با پاسخ نمونهٔ واحد زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \frac{\sin(\pi n/۳)}{\pi n}$$

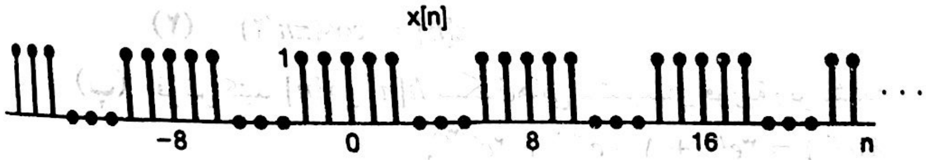
خروجی را به ازای هر یک از ورودیهای زیر تعیین کنید:

(۱) $x[n] =$ موج مربعی ترسیم شده در شکل م ۵-۳۰

(۲) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - ۸k]$

(۳) $x[n] = (-۱)^n$ ضرب در موج مربعی ترسیم شده در شکل م ۵-۳۰

(۴) $x[n] = \delta[n + ۱] + \delta[n - ۱]$



شکل م۵-۳۰

۵-۳۱ می‌دانیم که سیستم LTI ی S با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ و پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ دارای این خاصیت است که، وقتی $-\pi \le \omega_\circ \le \pi$ باشد،

$$\cos \omega_\circ n \longrightarrow \omega_\circ \cos \omega_\circ n.$$

(الف) $H(e^{j\omega})$ را تعیین کنید.

(ب) $h[n]$ را تعیین کنید.

۵-۳۲ فرض کنید که $h_۱[n]$ و $h_۲[n]$ پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTI علّی باشند و گیریم که $H_۱(e^{j\omega})$ و

$H_2(e^{j\omega})$ پاسخهای فرکانسی متناظر باشند. تحت این شرایط، آیا معادلهٔ زیر در حالت کلی درست است یا خیر؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

$$\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})d\omega\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_2(e^{j\omega})d\omega\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_1(e^{j\omega})H_2(e^{j\omega})d\omega.$$

۵-۳۳ یک سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی زیر را درنظر بگیرید:

$$y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] = x[n].$$

(الف) پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ را برای این سیستم به دست آورید.

(ب) پاسخ این سیستم به ورودیهای زیر چیست؟

(۱) $x[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$

(۲) $x[n] = (-\frac{1}{2})^n u[n]$

(۳) $x[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$

(۴) $x[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$

(پ) پاسخ به ورودیهایی با تبدیلهای فوریهٔ زیر را بیابید:

(۱) $$X(e^{j\omega}) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

(۲) $$X(e^{j\omega}) = \frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

(۳) $$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\omega})(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega})}$$

(۴) $$X(e^{j\omega}) = 1 + 2e^{-j3\omega}$$

۵-۳۴ سیستمی متشکل از اتصال متوالی دو سیستم LTI با پاسخهای فرکانسی زیر را درنظر بگیرید:

$$H_1(e^{j\omega}) = \frac{2-e^{-j\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

و

$$H_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{1}{4}e^{-j2\omega}}.$$

(الف) معادلهٔ تفاضلی‌ای که سیستم کلی را توصیف می‌کند، بیابید.

(ب) پاسخ ضربهٔ سیستم کلی را به دست آورید.

۵-۳۵ یک سیستم LTI علّی با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$y[n] - ay[n-1] = bx[n] + x[n-1],$$

که در آن a عددی حقیقی و با اندازه‌ای کوچکتر از یک است.

(الف) مقداری برای b چنان بیابید که پاسخ فرکانسی سیستم در رابطهٔ زیر صدق کند:

$$|H(e^{j\omega})| = ۱ \quad , \quad \text{برای تمام } \omega \text{ها}$$

این نوع سیستم را **سیستم تمام گذر** می‌نامند زیرا به ازای هیچ مقداری از ω، ورودی $e^{j\omega n}$ را تضعیف نمی‌کند. در بقیهٔ مسأله از مقداری که برای b پیدا کرده‌اید، استفاده کنید.

(ب) به ازای $a = \frac{۱}{۲}$، $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ را برای $۰ \leq \omega \leq \pi$ به طور تقریبی رسم کنید.

(پ) به ازای $a = -\frac{۱}{۲}$، $\sphericalangle H(e^{j\omega})$ را برای $۰ \leq \omega \leq \pi$ به طور تقریبی رسم کنید.

(ت) به ازای $a = -\frac{۱}{۲}$ و برای ورودی

$$x[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n u[n]$$

خروجی این سیستم را به دست آورده و رسم کنید. از این مثال ملاحظه می‌شود که در مقایسه با انتقال زمانی حاصل از فاز خطی، تغییر غیرخطی در فاز می‌تواند تأثیر بسیار متفاوتی بر روی سیگنال داشته باشد.

۵-۳۶ (الف) فرض کنید $h[n]$ و $g[n]$ پاسخهای ضربهٔ دو سیستم LTI زمان-گسستهٔ پایدار باشند که معکوس یکدیگرند. رابطهٔ بین پاسخهای فرکانسی این دو سیستم چیست؟

(ب) سیستم‌های LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را درنظر بگیرید. در هر مورد، پاسخ ضربهٔ سیستم معکوس و معادلهٔ تفاضلی‌ای که آن را مشخص می‌کند، تعیین کنید.

(۱) $y[n] = x[n] - \frac{۱}{۴}x[n-۱]$

(۲) $y[n] + \frac{۱}{۲}y[n-۱] = x[n]$

(۳) $y[n] + \frac{۱}{۲}y[n-۱] = x[n] - \frac{۱}{۴}x[n-۱]$

(۴) $y[n] + \frac{۵}{۴}y[n-۱] - \frac{۱}{۸}y[n-۲] = x[n] - \frac{۱}{۴}x[n-۱] - \frac{۱}{۸}x[n-۲]$

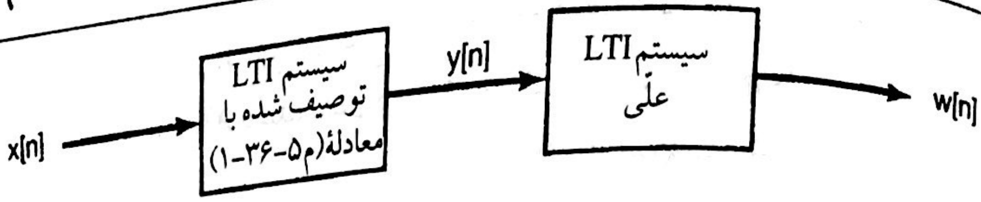
(۵) $y[n] + \frac{۵}{۴}y[n-۱] - \frac{۱}{۸}y[n-۲] = x[n] - \frac{۱}{۲}x[n-۱]$

(۶) $y[n] + \frac{۵}{۴}y[n-۱] - \frac{۱}{۸}y[n-۲] = x[n]$

(پ) سیستم LTI زمان-گسستهٔ علّی توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی زیر را درنظر بگیرید:

$$y[n] + y[n-۱] + \frac{۱}{۴}y[n-۲] = x[n-۱] - \frac{۱}{۲}x[n-۲]. \quad (\text{م}۵\text{-}۳۶\text{-}۱)$$

معکوس این سیستم چیست؟ نشان دهید که سیستم معکوس علّی نیست. یک سیستم LTI علّی دیگر بیابید که "معکوس با تأخیر" سیستم توصیف شده با معادلهٔ (م۵-۳۶-۱) باشد. مشخصاً یک سیستم LTI علّی چنان بیابید که خروجی $w[n]$ در شکل م۵-۳۶ مساوی $x[n-۱]$ باشد.



شکل م۵-۳۶

مسائل پیشرفته

۳۷-۵ فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ باشد. برای تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر عبارتهایی برحسب $X(e^{j\omega})$ به دست آورید. (فرض کنید که $x[n]$ حقیقی است.)

(الف) $\mathcal{R}e\{x[n]\}$

(ب) $x^*[-n]$

(پ) $\mathcal{E}v\, x[n]$

۳۸-۵ فرض کنید $X(e^{j\omega})$ تبدیل فوریهٔ سیگنال حقیقی $x[n]$ باشد. با به دست آوردن عبارتهایی برای $B(\omega)$ و $C(\omega)$ برحسب $X(e^{j\omega})$، نشان دهید که $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x[n] = \int_0^{\pi} \{B(\omega)\cos\omega + C(\omega)\sin\omega\}d\omega$$

۳۹-۵ خاصیت کانولوشن را به دست آورید:

$$x[n] * h[n] \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}).$$

۴۰-۵ فرض کنید $x[n]$ و $h[n]$ دو سیگنال باشند و گیریم که $y[n] = x[n] * h[n]$ باشد. دو عبارت برای $y[0]$ بنویسید، یکی (با استفادهٔ مستقیم از جمع کانولوشن) برحسب $x[n]$ و $h[n]$، و دیگری (با استفاده از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه) برحسب $X(e^{j\omega})$ و $H(e^{j\omega})$. سپس با انتخاب مناسبی برای $h[n]$، از این دو عبارت استفاده کرده و رابطهٔ پارسوال را به دست آورید — یعنی:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega.$$

به طریقی مشابه، تعمیم زیر از رابطهٔ پارسوال را به دست آورید:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Z^*(e^{j\omega})d\omega.$$

۴۱-۵ فرض کنید $\tilde{x}[n]$ سیگنالی متناوب با دورهٔ تناوب N باشد. سیگنال با طول محدود $x[n]$ از طریق رابطهٔ زیر، به ازای یک عدد صحیح n_0، به $\tilde{x}[n]$ مرتبط می‌شود:

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & n_0 \le n \le n_0 + N - 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

یعنی $x[n]$ مساوی $\tilde{x}[n]$ در طول یک دورهٔ تناوب بوده و در سایر جاها برابر صفر است.

(الف) اگر $\tilde{x}[n]$ دارای ضرایب سری فوریه a_k بوده و $x[n]$ دارای تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ باشد، نشان دهید که صرف‌نظر از مقدار n_0 داریم:

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j2\pi k/N}).$$

(ب) دو سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x[n] = u[n] - u[n-5]$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-kN]$$

که N یک عدد صحیح مثبت است. فرض کنید که a_k نشان دهندهٔ ضرایب فوریهٔ $\tilde{x}[n]$ و $X(e^{j\omega})$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ باشند.

(۱) عبارتی به صورت بسته برای $X(e^{j\omega})$ به دست آورید.

(۲) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (۱)، عبارتی برای ضریب فوریه a_k تعیین کنید.

۵-۴۲ در این مسأله، خاصیت انتقال فرکانسی فوریهٔ زمان-گسسته را به عنوان حالت خاصی از خاصیت ضرب به دست می‌آوریم. فرض کنید $x[n]$ سیگنال زمان-گسستهٔ دلخواهی با تبدیل فوریه $X(e^{j\omega})$ باشد و گیریم که:

$$g[n] = e^{j\omega_0 n} x[n]$$

(الف) تبدیل فوریهٔ

$$p[n] = e^{j\omega_0 n}$$

را تعیین و رسم کنید.

(ب) خاصیت ضرب تبدیل فوریه چنین بیان می‌دارد که، چون:

$$g[n] = p[n]x[n],$$

می‌باشد، بنابراین:

$$G(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} X(e^{j\theta}) P(e^{j(\omega-\omega_0)}) d\theta.$$

با محاسبهٔ این انتگرال، نشان دهید که:

$$G(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\omega_0)}).$$

۵-۴۳ فرض کنید $x[n]$ سیگنالی با تبدیل فوریهٔ $X(e^{j\omega})$ باشد و گیریم که

$$g[n] = x[2n]$$

سیگنالی باشد که تبدیل فوریهٔ آن برابر $G(e^{j\omega})$ است. در این مسأله، رابطهٔ بین $G(e^{j\omega})$ و $X(e^{j\omega})$ را به دست می‌آوریم.

(الف) فرض کنید:

$$v[n] = \frac{(e^{-j\pi n} x[n]) + x[n]}{2}.$$

تبدیل فوریه $V(e^{j\omega})$ برای سیگنال $v[n]$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان کنید.

(ب) با توجه به این که برای n های فرد $v[n] = 0$ است، نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $v[2n]$ مساوی $V(e^{j\frac{\omega}{2}})$ است.

(پ) نشان دهید که:

$$x[2n] = v[2n].$$

در نتیجه داریم:

$$G(e^{j\omega}) = V(e^{j\omega/2}).$$

اکنون، از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و $G(e^{j\omega})$ را برحسب $X(e^{j\omega})$ بیان کنید.

۴۴-۵ (الف) فرض کنید

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

یک سیگنال باشد و گیریم که $X_1(e^{j\omega})$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ $x_1[n]$ باشد. $x_1[n]$ را همراه با سیگنال‌هایی با تبدیلهای فوریهٔ زیر ترسیم کنید:

(۱) $X_2(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{j\omega}, \quad |\omega| < \pi$

(۲) $X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega})e^{-j3\omega/2}, \quad |\omega| < \pi$

(ب) فرض کنید

$$w(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{3T}\right) + \sin\left(\frac{\pi t}{2T}\right)$$

یک سیگنال زمان- پیوسته باشد. توجه کنید که $x_1[n]$ را می‌توان به صورت دنباله‌ای از نمونه‌هایی به فواصل یکسان از $w(t)$ درنظر گرفت؛ یعنی:

$$x_1[n] = w(nT).$$

نشان دهید که:

$$x_2[n] = w(nT - \alpha)$$

و

$$x_3[n] = w(nT - \beta)$$

و مقادیر α و β را مشخص کنید. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که $x_2[n]$ و $x_3[n]$ نیز برابر نمونه‌هایی به فواصل یکسان از $w(t)$ هستند.

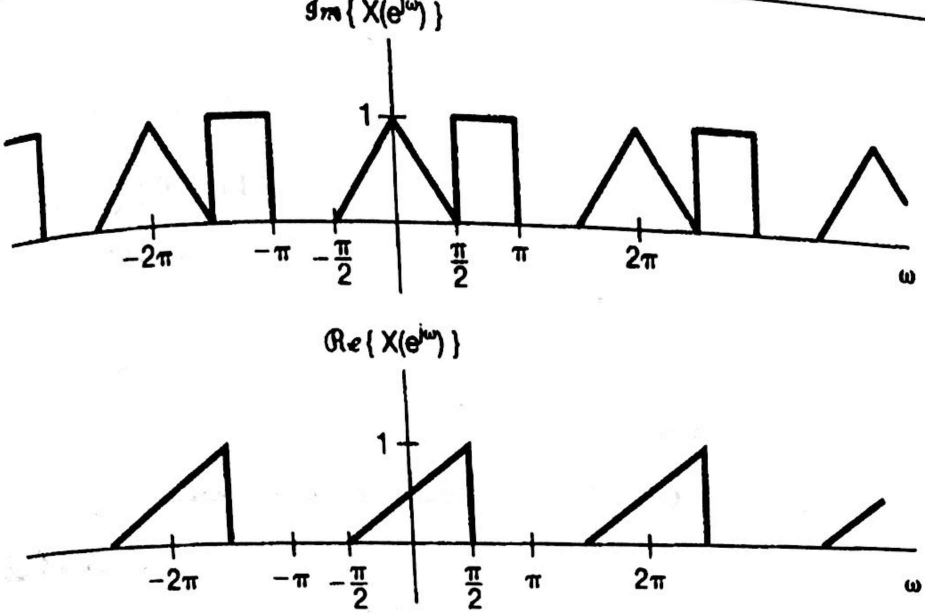
۴۵-۵ سیگنال زمان-گسستهٔ $x[n]$ را با تبدیل فوریه‌ای که درشکل م۵-۴۵ تصویر شده است، درنظر بگیرید. برای سیگنال‌های زمان- پیوستهٔ زیر ترسیم‌هایی مدرج ارائه کنید.

(الف) $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j(2\pi/10)nt}$

(ب) $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]e^{j(2\pi/10)nt}$

(پ) $x_3(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}d\{x[n]e^{j(2\pi/8)nt}\}$

(ت) $x_4(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}e\{x[n]e^{j(2\pi/6)nt}\}$



شکل م۵-۴۵

۵-۴۶ در مثال ۵-۱ نشان دادیم که برای $|\alpha| < ۱$ داریم:

$$\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{۱}{۱ - \alpha e^{-j\omega}}.$$

(الف) از خواص تبدیل فوریه استفاده کرده و نشان دهید که :

$$(n + ۱)\alpha^n u[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{۱}{(۱ - \alpha e^{-j\omega})^۲}$$

(ب) با استقراء نشان دهید که عکس تبدیل فوریهٔ

$$X(e^{j\omega}) = \frac{۱}{(۱ - \alpha e^{-j\omega})^r}.$$

برابر است با:

$$x[n] = \frac{(n + r - ۱)!}{n!(r - ۱)!}\alpha^n u[n].$$

۵-۴۷ درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را تعیین کنید. جوابهای خود را توجیه نمایید. در هر عبارت، تبدیل فوریهٔ $x[n]$ با $X(e^{j\omega})$ نشان داده شده است.

(الف) اگر $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - ۱)})$ باشد، آنگاه برای $|n| > ۰$ ، $x[n] = ۰$ است.

(ب) اگر $X(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega - \pi)})$ باشد، آنگاه برای $|n| > ۰$ ، $x[n] = ۰$ است.

(پ) اگر $X(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega/۲})$ باشد، آنگاه برای $|n| > ۰$ ، $x[n] = ۰$ است.

(ت) اگر $X(e^{j\omega}) = X(e^{j۲\omega})$ باشد، آنگاه برای $|n| > ۰$ ، $x[n] = ۰$ است.

۵-۴۸ یک سیستم زمان-گسستهٔ علّی خطی و تغییر ناپذیر با زمان با ورودی نشان داده شده با $x[n]$ و خروجی نشان داده شده با $y[n]$ مفروض است. این سیستم با زوج معادلهٔ تفاضلی زیر که شامل سیگنال میانی $w[n]$ است، مشخص شده است:

$$y[n] + \frac{۱}{۴}y[n - ۱] + w[n] + \frac{۱}{۲}w[n - ۱] = \frac{۲}{۳}x[n],$$

$$y[n] - \frac{۵}{۴}y[n - ۱] + ۲w[n] - ۲w[n - ۱] = -\frac{۵}{۳}x[n].$$

(الف) پاسخ فرکانسی و پاسخ نمونهٔ واحد این سیستم را بیابید.

(ب) برای این سیستم یک معادلهٔ تفاضلی که $x[n]$ را به $y[n]$ مرتبط می‌سازد، به دست آورید.

۵-۴۹ (الف) سیستم زمان-گسستهٔ به خصوصی دارای ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ است. تبدیل فوریهٔ این سیگنال‌ها با معادلهٔ زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$Y(e^{j\omega}) = 2X(e^{j\omega}) + e^{-j\omega} X(e^{j\omega}) - \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}.$$

(۱) آیا این سیستم خطی است؟ جواب خود را به روشنی توجیه کنید.

(۲) آیا این سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟ جواب خود را به روشنی توجیه کنید.

(۳) اگر $x[n] = \delta[n]$ باشد، $y[n]$ برابر چیست؟

(ب) یک سیستم زمان-گسسته را درنظر بگیرید که در آن تبدیل $Y(e^{j\omega})$ برای خروجی از طریق رابطهٔ زیر به تبدیل ورودی مربوط می‌شود:

$$Y(e^{j\omega}) = \int_{\omega-\pi/4}^{\omega+\pi/4} X(e^{j\omega})d\omega.$$

عبارتی برای $y[n]$ برحسب $x[n]$ بیابید.

۵-۵۰ (الف) فرض کنید که می‌خواهیم سیستم LTI زمان-گسسته‌ای طرح کنیم که دارای این خاصیت باشد که اگر ورودی برابر

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

باشد آنگاه خروجی به صورت زیر باشد:

$$y[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n].$$

(۱) پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI زمان-گسسته را بیابید که دارای خاصیت فوق باشد.

(۲) معادلهٔ تفاضلی ارتباط دهندهٔ $x[n]$ و $y[n]$ راکه سیستم را مشخص می‌کند، بیابید.

(ب) فرض کنید که یک سیستم LTI دارای پاسخ $(1/4)^n u[n]$ به ورودی $(n+2)(1/2)^n u[n]$ است. اگر خروجی این سیستم به صورت $\delta[n] - (-1/2)^n u[n]$ باشد، ورودی برای چیست؟

۵-۵۱ (الف) یک سیستم LTI زمان-گسسته با پاسخ نمونهٔ واحد زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n].$$

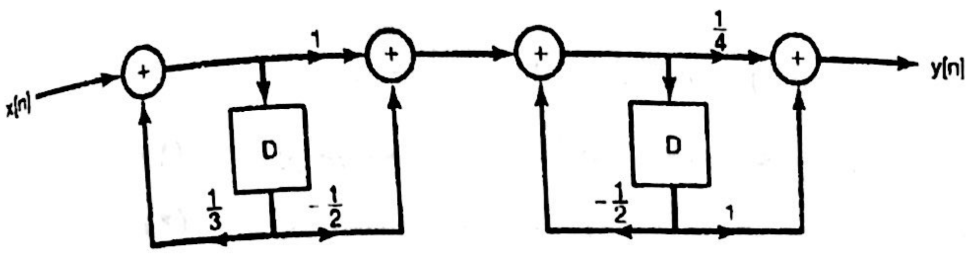
یک معادلهٔ تفاضلی خطی با ضرایب ثابت که ورودی و خروجی سیستم را به هم مرتبط می‌سازد، تعیین کنید.

(ب) شکل م۵-۵۱ پیاده سازی دیاگرام بلوکی یک سیستم LTI علّی را نشان می‌دهد.

(۱) برای این سیستم معادلهٔ تفاضلی‌ای راکه $x[n]$ و $y[n]$ را به هم مرتبط می‌سازد، بیابید.

(۲) پاسخ فرکانسی سیستم چیست؟

(۳) پاسخ ضربهٔ سیستم را تعیین کنید.



شکل م۵-۵۱

۵-۵۲ (الف) فرض کنید $h[n]$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI زمان-گسستهٔ حقیقی و علّی باشد. نشان دهید که این سیستم به طور کامل با جزء حقیقی پاسخ فرکانسی خود مشخص می‌شود. (راهنمایی: نشان دهید که چگونه می‌توان $h[n]$ را از روی $\mathcal{E}v\{h[n]\}$ به دست آورد. تبدیل فوریهٔ $\mathcal{E}v\{h[n]\}$ برابر چیست؟) این خاصیت همتای زمان-گسستهٔ خاصیت کفایت جزء حقیقی سیستم‌های LTI علّی است که درمسألهٔ ۴-۴۷ در مورد سیستم‌های زمان-پیوسته مطرح شد.

(ب) فرض کنید $h[n]$ حقیقی و علّی باشد. اگر داشته باشیم:

$$\mathcal{R}e\{H(e^{j\omega})\} = ۱ + \alpha \cos ۲\omega , \qquad (\text{حقیقی } \alpha)$$

$h[n]$ و $H(e^{j\omega})$ را تعیین کنید.

(پ) نشان دهید که می‌توان $h[n]$ را از روی اطلاعات $\mathcal{I}m\{H(e^{j\omega})\}$ و $h[۰]$ به طور کامل به دست آورد.

(ت) دو سیستم LTI حقیقی و علّی چنان بیابید که پاسخهای فرکانسی آنها دارای جزء موهومی برابر $\sin \omega$ باشد.

مسائل تعمیمی

۵-۵۳ یکی از دلایل گسترش فوق‌العادهٔ استفاده از روشهای زمان-گسسته برای تحلیل و ترکیب سیگنال‌ها و سیستم‌ها ایجاد ابزارهای بسیار کارآمد جهت انجام تحلیل فوریهٔ دنباله‌های زمان-گسسته بود. اساس این روشها، تکنیکی است که رابطهٔ بسیار نزدیکی با تحلیل فوریهٔ زمان-گسسته داشته و برای استفاده درکامپیوتر دیجیتال یا برای پیاده سازی با سخت‌افزار دیجیتال به طور ایده‌آلی مناسب است. این تکنیک ، تبدیل فوریهٔ گسسته (DFT) برای سیگنال‌های با طول محدود است.

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی با طول محدود باشد؛ یعنی عدد صحیح N_1ی وجود داشته باشد به طوری که:

$$x[n] = 0 \quad , \quad \text{خارج از بازهٔ} \quad 0 \le n \le N_1 - 1$$

علاوه براین، گیریم که $X(e^{j\omega})$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ $x[n]$ باشد. می‌توانیم سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ را چنان بسازیم که درطول یک دورهٔ تناوب مساوی $x[n]$ باشد. مشخصاً فرض کنید $N \ge N_1$ عدد صحیح مفروضی باشد و $\tilde{x}[n]$ را متناوب با دورهٔ تناوب N بگیرید به طوری که:

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \le n \le N-1$$

ضرایب سری فوریهٔ $\tilde{x}[n]$ به صورت زیر هستند:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

اگر بازهٔ مجموع را چنان انتخاب کنیم که در آن $\tilde{x}[n] = x[n]$ باشد، خواهیم داشت:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م۵-۵۳-۱)}$$

مجموعه ضرایب تعریف شده با معادلهٔ (م۵-۵۳-۱) ، DFT سیگنال $x[n]$ را تشکیل می‌دهد. مشخصاً ، DFT سیگنال $x[n]$ را معمولاً با $\tilde{X}[k]$ نشان می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{X}[k] = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad k = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(م۵-۵۳-۲)}$$

اهمیت DFT از چند واقعیت ناشی می‌شود. نخست توجه کنید که سیگنال با طول محدود اصلی را می‌توان از روی DFT آن به دست آورد. مشخصاً داریم:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, \ldots, N-1 \qquad \text{(م۵-۵۳-۳)}$$

بنابراین می‌توان چنین تصور کرد که سیگنال با طول محدود را می‌شود هم با مجموعه‌ای محدود از مقادیر غیرصفری که دارد و هم با مجموعه‌ای محدود از مقادیر $\tilde{X}[k]$ در DFT آن مشخص نمود. ویژگی مهم دوم DFT این است که الگوریتمی بسیار سریع، موسوم به تبدیل فوریهٔ سریع (FFT)، برای محاسبهٔ آن وجود دارد (برای آشنایی با این روش بسیار مهم، مسألهٔ ۵-۵۴ را ببینید). همچنین DFT به خاطر رابطهٔ بسیار نزدیکش با سری و تبدیل فوریهٔ زمان-گسسته، برخی از خواص مهم آنها را نیز دارد.

(الف) فرض کنید $N \ge N_1$ باشد. نشان دهید:

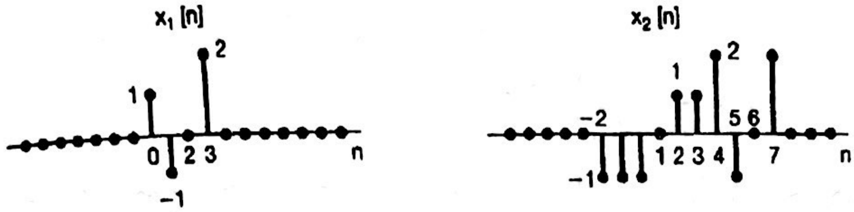
$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} X(e^{j(2\pi k/N)}),$$

که درآن $\tilde{X}[k]$ برابر DFT سیگنال $x[n]$ است. یعنی DFT متناظر با نمونه‌هایی از $X(e^{j\omega})$ است که به فواصل $2\pi/N$ برداشته می‌شوند. معادلهٔ (م۵-۵۳-۳) ما را برآن می‌دارد

که نتیجه بگیریم $x[n]$ را می‌توان به طور یکتا با این نمونه‌ها از $X(e^{j\omega})$ نمایش داد.

(ب) اکنون نمونه‌هایی از $X(e^{j\omega})$ راکه به فواصل $۲\pi/M$ برداشته می‌شود، با $M < N_۱$، درنظر بگیرید. این نمونه‌ها متناظر با بیش از یک دنباله به طول $N_۱$ هستند. برای تشریح این مطلب، دوسیگنال $x_۱[n]$ و $x_۲[n]$ راکه درشکل م ۵-۵۳ ترسیم شده‌اند، درنظر بگیرید. نشان دهید که اگر $M = ۴$ انتخاب کنیم، برای تمام مقادیر k داریم:

$$X_۱(e^{j(۲\pi k/۴)}) = X_۲(e^{j(۲\pi k/۴)}).$$



شکل م۵-۵۳

۵-۵۴ همان‌طور که در مسألهٔ ۵-۵۳ نشان داده شد، مسائل بسیاری با اهمیت عملی وجود دارند که در آنها محاسبهٔ تبدیل فوریهٔ گسسته (DFT) از سیگنال‌های زمان-گسسته لازم می‌شود. این سیگنال‌ها غالباً دارای طولی بسیار بلند می‌باشند و در چنین مواردی استفاده از روشهای کارآمد محاسباتی امری بسیار مهم است. یکی از دلایل افزایش چشمگیر استفاده از روشهای کامپیوتری برای تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها، پیدایش روشی بسیار کارآمد موسوم به الگوریتم تبدیل فوریهٔ سریع (FFT) جهت محاسبهٔ DFT دنباله‌های با طول محدود بود. در این مسأله، ما اصلی راکه FFT برآن بنا نهاده شده است ، مطرح می‌کنیم.

فرض کنید $x[n]$ سیگنالی باشد که در خارج از بازهٔ $۰ \le n \le N_۱ - ۱$ برابر صفر است. برای $N \ge N_۱$ ، DFT N-نقطه‌ای $x[n]$ به صورت زیر است:

$$\tilde{X}[k] = \frac{۱}{N} \sum_{k=۰}^{N-۱} x[n] e^{-jk(۲\pi/N)n} , \quad k = ۰ ,۱,..., N-۱ \qquad \text{(م۵-۵۴-۱)}$$

مناسب است که معادلهٔ (م۵-۵۴-۱) را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{X}[k] = \frac{۱}{N} \sum_{k=۰}^{N-۱} x[n] W_N^{nk}, \qquad \text{(م۵-۵۴-۲)}$$

که در آن :

$$W_N = {}^{-j۲\pi/N}$$

(الف) یک روش برای به دست آوردن $\tilde{X}[k]$، محاسبهٔ مستقیم معادلهٔ (م۵-۵۴-۲) است. یک معیار مفید برای سنجش پیچیدگی چنین محاسبه‌ای، تعداد کل ضربهای مختلط لازم می‌باشد. نشان دهید که تعداد ضربهای مختلطی که برای محاسبهٔ مستقیم معادلهٔ (م۵-۵۴-۲) ، برای $k = ۰, ۱, ..., N-۱$ ، لازم است برابر $N^۲$ است. فرض کنید که $x[n]$ مختلط است و مقادیر موردنیاز W_N^{nk} از پیش محاسبه شده و در جدولی ذخیره شده‌اند. برای سادگی ، از این واقعیت استفاده نکنید که به ازای برخی از مقادیر n و k، W_N^{nk} مساوی ± ۱ یا $\pm j$ است و

لذا، اگر بخواهیم دقیقتر بیان کنیم، به یک ضرب مختلط کامل نیاز ندارد.

(ب) فرض کنید که N زوج است. گیریم $f[n] = x[2n]$ نشان دهندهٔ نمونه‌های با شاخص زوج $x[n]$ و $g[n] = x[2n+1]$ نشان دهندهٔ نمونه‌های با شاخص فرد $x[n]$ باشند.

(۱) نشان دهید که $f[n]$ و $g[n]$ در خارج از بازهٔ $0 \le n \le (N/2) - 1$ برابر صفر هستند.

(۲) نشان دهید که N DFT نقطه‌ای $\tilde{X}[k]$ از $x[n]$ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\tilde{X}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}{}^{nk} + \frac{1}{N} W_N{}^{k} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}{}^{nk}$$

$$= \frac{1}{2} \tilde{F}[k] + \frac{1}{2} W_N{}^{k} \tilde{G}[k], \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (\text{م}5\text{-}54\text{-}3)$$

که در آن:

$$\tilde{F}[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n] W_{N/2}{}^{nk}$$

$$\tilde{G}[k] = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n] W_{N/2}{}^{nk}.$$

(۳) نشان دهید که برای تمام k ها داریم:

$$\tilde{F}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \tilde{F}[k],$$

$$\tilde{G}\left[k + \frac{N}{2}\right] = \tilde{G}[k].$$

توجه کنید که $\tilde{F}[k]$، $k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$، و $\tilde{G}[k]$، $k = 0, 1, \dots, (N/2) - 1$، به ترتیب DFT های $(N/2)$-نقطه‌ای از $f[n]$ و $g[n]$ هستند. بدین‌ترتیب معادلهٔ (م ۵-۵۴-۳) نشان می‌دهد که DFT به طول N از $x[n]$ را می‌توان برحسب دو DFT با طولهای $N/2$ محاسبه کرد.

(۴) تعداد ضربهای مختلط لازم را برای محاسبهٔ $\tilde{X}[k]$، $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$، از طریق معادلهٔ (م۵-۵۴-۳) با ابتدا محاسبهٔ $\tilde{F}[k]$ و $\tilde{G}[k]$، تعیین کنید. [همان فرضهای قسمت (الف) در مورد ضربها را درنظر گرفته و ضربهای در عدد ۱/۲ در معادلهٔ (م۵-۵۴-۳) را نادیده بگیرید.]

(پ) اگر $N/2$ هم مثل N زوج باشد، آنگاه می‌توان هر کدام از $f[n]$ و $g[n]$ را به دنباله‌هایی متشکل از نمونه‌های با شاخص زوج و با شاخص فرد تفکیک کرد و بنابراین می‌توان DFTهای آنها را با استفاده از همان فرایند در معادلهٔ (م۵-۵۴-۳) محاسبه کرد. علاوه براین، اگر N توان صحیحی از ۲ باشد، می‌توان تکرار این فرایند را ادامه داد و بدین ترتیب به صرفه‌جویی چشمگیری در زمان محاسبه دست یافت. با این روند، تقریباً چند ضرب مختلط برای $N = 32, 256, 1024, 4096$ لازم می‌شود؟ این نتیجه را با نتیجهٔ به دست آمده از روش محاسبهٔ مستقیم در قسمت (الف) مقایسه کنید.

۵-۵۵ در این مسأله مفهوم پنجره کردن را معرفی می‌کنیم که هم در طراحی سیستم‌های LTI و هم در تحلیل طیفی سیگنال‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. پنجره کردن عبارت است از گرفتن سیگنال $x[n]$ و ضرب آن در یک سیگنال پنجره با طول محدود؛ یعنی:

$$p[n] = x[n]\,w[n].$$

توجه کنید که $p[n]$ نیز دارای طول محدوده است.

اهمیت پنجره کردن در تحلیل طیفی برخاسته از این واقعیت است که در بسیاری از کاربردها لازم می‌شود که تبدیل فوریهٔ سیگنالی را که اندازه گیری شده است، محاسبه کنیم. چون در عمل فقط می‌توانیم سیگنال $x[n]$ را در بازهٔ زمانی محدودی (پنجرهٔ زمانی) اندازه گیری کنیم، سیگنال واقعی که جهت تحلیل طیفی در دسترس است، به صورت زیر می‌باشد:

$$p[n] = \begin{cases} x[n], & -M \le n \le M \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases},$$

که در آن $-M \le n \le M$ پنجرهٔ زمانی است. بنابراین:

$$p[n] = x[n]\,w[n],$$

که $w[n]$ پنجرهٔ مستطیلی است؛ یعنی:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & -M \le n \le M \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}. \qquad (۵-۵۵-۱م)$$

پنجره کردن در طراحی سیستم LTI نیز نقش دارد. بویژه، به دلایل متعددی (نظیر استفادهٔ بالقوّه از الگوریتم FFT؛ مسألهٔ م۵-۵۴ را ببینید)، غالباً سودمند است که برای رسیدن به برخی اهداف مطلوب در پردازش سیگنال، سیستمی را طراحی کنیم که دارای پاسخ ضربه با طول محدود است. بدین معنا که ما اغلب با یک پاسخ فرکانسی مطلوب $H(e^{j\omega})$ شروع می‌کنیم که عکس تبدیل آن $h[n]$ پاسخ ضربه‌ای با طول نامحدود (یا حداقل بسیار طولانی) است. سپس آن چه که لازم داریم، ساختن یک پاسخ ضربهٔ $g[n]$ با طول محدود است که تبدیل آن $G(e^{j\omega})$ تقریب مناسبی از $H(e^{j\omega})$ باشد. یک روش کلی برای انتخاب $g[n]$، یافتن یک تابع پنجره $w[n]$ است به طوری که تبدیل $h[n]w[n]$ مشخصات موردنظر برای $G(e^{j\omega})$ را برآورده سازد.

واضح است که پنجره کردن یک سیگنال اثری بر روی طیف به دست آمده خواهد داشت. در این مسأله این اثر تشریح می‌شود.

(الف) برای به دست آوردن درکی از اثر پنجره کردن، فرض کنید می‌خواهیم سیگنال

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-k]$$

را با استفاده از سیگنال پنجرهٔ مستطیلی داده شده در معادلهٔ (م ۵-۵۵-۱) پنجره نماییم.

(۱) $X(e^{j\omega})$ برابر چیست؟

(۲) تبدیل $p[n] = x[n]w[n]$ را به ازای $M = ۱$ رسم کنید.

(۳) همین کار را برای $M = ۱۰$ انجام دهید.

(ب) اکنون سیگنال $x[n]$ را که تبدیل فوریهٔ آن به صورت زیر مشخص شده است، درنظر بگیرید:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} ۱, & |\omega| < \pi/۴ \\ ۱, & \pi/۴ < |\omega| \le \pi \end{cases}.$$

فرض کنید $p[n] = x[n]w[n]$ باشد که در آن $w[n]$ پنجرهٔ مستطیلی درمعادلهٔ (م۵-۵۵-۱) است. $P(e^{j\omega})$ را به ازای $M = ۴, ۸, ۱۶$ به طور تقریبی رسم کنید.

(پ) یکی از مسائلی که در اثر استفاده از پنجرهٔ مستطیلی پیش می‌آید آن است که این پنجره سبب ایجاد ریپل‌هایی در تبدیل $P(e^{j\omega})$ می‌شود. (در واقع این اثر مستقیماً به پدیدهٔ گیبس مربوط می‌شود.) به این دلیل، انواع سیگنال‌های پنجرهٔ دیگر مطرح شده‌اند. این سیگنال‌ها شبیه مخروط شده‌اند؛ یعنی در مقایسه با گذار جهشی پنجرهٔ مستطیلی، این پنجره‌ها به تدریج از صفر به یک می‌روند. نتیجه عبارت است از کاهشی در دامنهٔ ریپل‌ها در $P(e^{j\omega})$ به بهای افزوده شدن مقداری اعوجاج از نظر هموار شدن بیشتر $X(e^{j\omega})$.

برای تشریح نکاتی که هم‌اکنون متذکر شدیم، سیگنال $x[n]$ توصیف شده در قسمت (ب) را درنظر بگیرید و فرض کنید $p[n] = x[n]w[n]$ باشد که در آن $w[n]$ پنجرهٔ مثلثی یا پنجرهٔ *Bartlett* است؛ یعنی:

$$w[n] = \begin{cases} ۱ - \dfrac{|n|}{M + ۱}, & -M \le n \le M \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

تبدیل فوریهٔ $p[n] = x[n]w[n]$ را به ازای $M = ۴, ۸, ۱۶$ به طور تقریبی رسم کنید. [راهنمایی: توجه کنید که سیگنال مثلثی را می‌توان برحسب کانولوشن سیگنال مستطیلی با خودش به دست آورد. این موضوع به عبارت مناسبی برای $W(e^{j\omega})$ منجر می‌شود.]

(ت) فرض کنید $p[n] = x[n]w[n]$، که در آن $w[n]$ سیگنال کسینوسی بالا آمده موسوم به پنجرهٔ *Hanning* است؛ یعنی:

$$w[n] = \begin{cases} \dfrac{۱}{۲}[۱ + \cos(\pi n/M)] & -M \le n \le M \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

$P(e^{j\omega})$ را به ازای $M = ۴, ۸, ۱۶$ به طور تقریبی رسم کنید.

۵-۵۶ فرض کنید $x[m, n]$ سیگنالی باشد که تابعی از دو متغیر گسستهٔ مستقل m و n است. درتشابه با حالت یک بُعدی و مشابه حالت زمان-پیوسته که در مسألهٔ ۴-۵۳ مطرح شد، تبدیل فوریهٔ دوبُعدی $x[m, n]$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$X(e^{j\omega_۱}, e^{j\omega_۲}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m, n] e^{-j(\omega_۱ m + \omega_۲ n)}. \quad (\text{م}۵\text{-}۵۶\text{-}۱)$$

(الف) نشان دهید که معادلهٔ (م۵-۵۶-۱) را می‌توان به صورت دوتبدیل فوریهٔ یک بعدی متوالی محاسبه کرد، ابتدا برحسب m با ثابت درنظر گرفتن n، و سپس برحسب n. از این نتیجه استفاده کرده و عبارتی برای $x[m, n]$ برحسب $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ به دست آورید.

(ب) فرض کنید که:

$$x[m, n] = a[m]b[n],$$

که $a[m]$ و $b[n]$ هر یک تابعی فقط از یک متغیر مستقل می‌باشند. فرض کنید $A(e^{j\omega})$ و $B(e^{j\omega})$ به ترتیب نشان دهندهٔ تبدیلهای فوریهٔ $a[m]$ و $b[n]$ باشند. $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ را برحسب $A(e^{j\omega})$ و $B(e^{j\omega})$ بیان کنید:

(پ) تبدیلهای فوریهٔ دوبعدی سیگنال‌های زیر را تعیین کنید:

(۱) $$x[m, n] = \delta[m-1]\delta[n+4]$$

(۲) $$x[m, n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} u[n-2]u[-m]$$

(۳) $$x[m, n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cos(2\pi m/3)u[n]$$

(۴) $$x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2<m<2 \text{ و } -4<n<4 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(۵) $$x[m, n] = \begin{cases} 1, & -2+n<m<2+n \text{ و } -4<n<4 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

(۶) $$x[m, n] = \sin\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{2\pi m}{5}\right)$$

(ت) سیگنال $x[m, n]$ را که تبدیل فوریهٔ آن به صورت زیر است، تعیین کنید:

$$X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega_1| \le \pi/4 \text{ و } 0 < |\omega_2| \le \pi/2 \\ 0, & \pi/4 < |\omega_1| < \pi \text{ یا } \pi/2 < |\omega_2| < \pi \end{cases}$$

(ث) فرض کنید $x[m, n]$ و $h[m, n]$ دو سیگنال باشند که تبدیلهای فوریهٔ دوبعدی آنها به ترتیب با $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ و $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ نشان داده می‌شوند. تبدیلهای سیگنال‌های زیر را برحسب $X(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ و $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ تعیین کنید.

(۱) $$x[m, n]e^{jW_1 m} e^{jW_2 n}$$

(۲) $$y[m, n] = \begin{cases} x[k, r], & \text{اگر } m = 2k \text{ و } n = 2r \\ 0, & \text{اگر } m \text{ یا } n \text{ مضربی از ۲ نباشند} \end{cases}$$

(۳) $$y[m, n] = x[m, n]h[m, n]$$