مسائل فصل ۴

بخش نخست از مسائل به مباحث پایه‌ای تعلق دارد و جوابهای آنها در انتهای کتاب ارائه شده است. سه بخش بعدی شامل مسائلی هستند که به ترتیب به مباحث پایه‌ای، پیشرفته، و تعمیمی تعلق دارند.

مسائل پایه‌ای با جواب

۴-۱ از معادلهٔ تحلیل تبدیل فوریه (۴-۹) استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $e^{-۲(t-۱)}u(t-۱)$ **(ب)** $e^{-۲|t-۱|}$

نمودار اندازهٔ هر تبدیل فوریه را ترسیم و مدرج کنید.

۴-۲ از معادلهٔ تحلیل تبدیل فوریه (۴-۹) استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\delta(t+۱)+\delta(t-۱)$ **(ب)** $\frac{d}{dt}\{u(-۲-t)+u(t-۲)\}$

نمودار اندازهٔ هر تبدیل فوریه را ترسیم و مدرج کنید.

۴-۳ تبدیل فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های متناوب زیر را تعیین کنید:

(الف) $\sin(۲\pi t+\frac{\pi}{۴})$ **(ب)** $۱+\cos(۶\pi t+\frac{\pi}{۸})$

۴-۴ از معادلهٔ ترکیب تبدیل فوریه (۴-۸) استفاده کرده و عکس تبدیلهای فوریهٔ زیر را تعیین کنید.

(الف) $X_۱(j\omega) = ۲\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - ۴\pi) + \pi\delta(\omega + ۴\pi)$

(ب)
$$X_۲(j\omega) = \begin{cases} ۲, & ۰ \leq \omega \leq ۲ \\ -۲, & -۲ \leq \omega < ۰ \\ ۰, & |\omega| > ۲ \end{cases}$$

۵-۴ از معادلهٔ ترکیب تبدیل فوریه ۴-۸ استفاده کرده و عکس تبدیل فوریهٔ $X(j\omega) = |X(j\omega)| e^{j\measuredangle X(j\omega)}$ را تعیین کنید که در آن:

$$|X(j\omega)| = ۲\{u(\omega + ۳) - u(\omega - ۳)\},$$
$$\measuredangle X(j\omega) = -\frac{۳}{۲}\omega + \pi.$$

از جواب خود استفاده کرده و مقادیری از t را که به ازای آنها $x(t) = ۰$ است، تعیین کنید.

۶-۴ با فرض این که $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ است، تبدیل فوریهٔ سیگنال‌های داده شد در زیر را برحسب $X(j\omega)$ بیان کنید. خواص تبدیل فوریه که در جدول ۴-۱ آمده است، می‌تواند مفید باشد.

(الف) $x_۱(t) = x(۱ - t) + x(-۱ - t)$ (ب) $x_۲(t) = x(۳t - ۶)$

(پ) $x_۳(t) = \dfrac{d^۲}{dt^۲} x(t - ۱)$

۷-۴ برای هر یک از تبدیلهای فوریهٔ زیر ، از خواص تبدیل فوریه (جدول ۴-۱) استفاده کرده و تعیین کنید که آیا سیگنال حوزهٔ زمانی متناظر، (۱) حقیقی، موهومی، یا هیچکدام و (۲) زوج، فرد، یا هیچکدام است. این کار را بدون محاسبهٔ عکس تبدیلهای داده شده، انجام دهید.

(الف) $X_۱(j\omega) = u(\omega) - u(\omega - ۲)$ (ب) $X_۲(j\omega) = \cos(۲\omega)\sin(\frac{\omega}{۲})$

(پ) $X_۳(j\omega) = A(\omega)e^{jB(\omega)}$، که در آن $A(\omega) = (\sin ۲\omega)/\omega$ و $B(\omega) = ۲\omega + \frac{\pi}{۲}$

(ت) $X_۴(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(\frac{۱}{۲})^{|k|}\delta(\omega - \frac{k\pi}{۴})$

۸-۴ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \begin{cases} ۰, & t < -\frac{۱}{۲} \\ t + \frac{۱}{۲}, & -\frac{۱}{۲} \leq t \leq \frac{۱}{۲} \\ ۱, & t > \frac{۱}{۲} \end{cases}.$$

(الف) از خواص مشتق‌گیری و انتگرال گیری در جدول ۴-۱ و زوج تبدیل فوریه برای پالس مستطیلی در جدول ۴-۲ استفاده کرده و عبارتی به صورت بسته برای $X(j\omega)$ بیابید.

(ب) تبدیل فوریهٔ $g(t) = x(t) - \frac{۱}{۲}$ برابر چیست ؟

۹-۴ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \begin{cases} ۰, & |t| > ۱ \\ (t + ۱)/۲, & -۱ \leq t \leq ۱ \end{cases}.$$

(الف) به کمک جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ عبارتی به صورت بسته برای $X(j\omega)$ تعیین کنید.

(ب) جزء حقیقی جواب خود در قسمت (الف) را درنظر گرفته و تحقیق کنید که برابر تبدیل فوریهٔ جزء زوج $x(t)$ است.

(پ) تبدیل فوریهٔ جزء فرد $x(t)$ برابر چیست؟

۴-۱۰ (الف) با استفاده از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ تبدیل فوریهٔ سیگنال زیر را تعیین کنید:

$$x(t) = t\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^2$$

(ب) با استفاده از رابطهٔ پارسوال و نتیجهٔ قسمت قبل، مقدار عددی عبارت زیر را تعیین کنید:

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2\left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)^4 dt$$

۴-۱۱ با توجه به روابط

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

و

$$g(t) = x(3t) * h(3t),$$

و با فرض این که $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ و $h(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $H(j\omega)$ است، از خواص تبدیل فوریه استفاده کرده و نشان دهید که $g(t)$ به صورت زیر است:

$$g(t) = Ay(Bt).$$

مقادیر A و B را تعیین کنید.

۴-۱۲ زوج تبدیل فوریهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$e^{-|t|} \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} \frac{2}{1+\omega^2}.$$

(الف) از خواص مناسب تبدیل فوریه استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ $te^{-|t|}$ را بیابید.

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) به همراه خاصیت دوگانی استفاده کرده و تبدیل فوریهٔ سیگنال زیر را تعیین کنید:

$$\frac{4t}{(1+t^2)^2}.$$

راهنمایی: مثال ۴-۱۳ را ببینید.

۴-۱۳ فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که تبدیل فوریهٔ آن به صورت زیر است:

$$X(j\omega) = \delta(\omega) + \delta(\omega - \pi) + \delta(\omega - 5),$$

و فرض کنید:

$$h(t) = u(t) - u(t - 2).$$

(الف) آیا $x(t)$ متناوب است؟

(ب) آیا $x(t) * h(t)$ متناوب است؟

(پ) آیا کانولوشن دوسیگنال نامتناوب می‌تواند متناوب باشد؟

۴-۱۴ سیگنال $x(t)$ با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که اطلاعات زیر به ما داده شده است:

۱- $x(t)$ حقیقی و نامنفی است.

۲- $\mathfrak{F}^{-1}\{(1 + j\omega)X(j\omega)\} = Ae^{-2t}u(t)$، که A مستقل از t است.

۳- $\int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = 2\pi$.

عبارتی به صورت بسته برای $x(t)$ تعیین کنید.

۴-۱۵ فرض کنید $x(t)$ سیگنالی با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ باشد. فرض کنید که اطلاعات زیر به ما داده شده است:

۱- $x(t)$ حقیقی است.

۲- برای $t \leq 0$، $x(t) = 0$ است.

۳- $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}e\{X(j\omega)\}e^{j\omega t}d\omega = |t|e^{-|t|}$

عبارتی به صورت بسته برای $x(t)$ تعیین کنید.

۴-۱۶ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\frac{\pi}{4})}{(k\frac{\pi}{4})}\delta(t - k\frac{\pi}{4}).$$

(الف) $g(t)$ را چنان تعیین کنید که:

$$x(t) = \left(\frac{\sin t}{\pi t}\right)g(t).$$

(ب) از خاصیت ضرب تبدیل فوریه استفاده کرده و نشان دهید که $X(j\omega)$ متناوب است. $X(j\omega)$ را در یک دورهٔ تناوب مشخص کنید.

۴-۱۷ تعیین کنید که آیا هر یک از عبارتهای زیر درست یا نادرست است. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) یک سیگنال فرد و موهومی همیشه دارای تبدیل فوریهٔ فرد و موهومی است.

(ب) کانولوشن یک تبدیل فوریهٔ فرد با یک تبدیل فوریهٔ زوج همیشه فرد است.

۴-۱۸ پاسخ ضربهٔ سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر را بیابید:

$$H(j\omega) = \frac{(\sin^2(3\omega))\cos\omega}{\omega^2}.$$

۴-۱۹ یک سیستم LTI علّی با پاسخ فرکانسی زیر را درنظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 3}.$$

برای یک ورودی خاص $x(t)$، ملاحظه می‌شود که این سیستم خروجی زیر را ایجاد می‌کند:

$$y(t) = e^{-3t}u(t) - e^{-4t}u(t).$$

$x(t)$ را تعیین کنید.

۴-۲۰ پاسخ ضربهٔ سیستم LTI علّی را که با مدار RLC مطرح شده در مسألهٔ ۳-۲۰ مشخص شده است، به دست آورید. این کار را با گرفتن عکس تبدیل فوریه از پاسخ فرکانسی مدار انجام دهید. برای کمک به محاسبهٔ عکس تبدیل فوریه، می‌توانید از جدولهای ۴-۱ و ۴-۲ استفاده کنید.

مسائل پایه‌ای

۴-۲۱ تبدیل فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $[e^{-\alpha t}\cos\omega_{\circ}t]u(t),\ \alpha>\circ$

(ب) $e^{-۳|t|}\sin ۲t$

(پ) $x(t)=\begin{cases}۱+\cos\pi t, & |t|\le ۱\\ \circ, & |t|>۱\end{cases}$

(ت) $\sum_{k=\circ}^{\infty}\alpha^k\delta(t-kT),\ |\alpha|<۱$

(ث) $[te^{-۲t}\sin ۴t]u(t)$

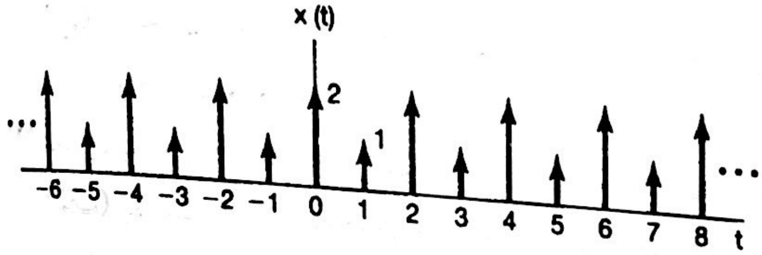
(ج) $\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right]\left[\frac{\sin ۲\pi(t-۱)}{\pi(t-۱)}\right]$

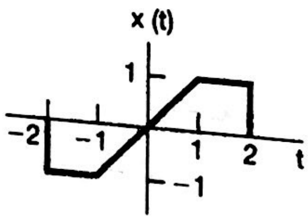
(چ) $x(t)$ به صورت نشان داده شده در شکل م ۴-۲۱ (الف)

(ح) $x(t)$ به صورت نشان داده شده در شکل م۴-۲۱ (ب)

(خ) $x(t)=\begin{cases}۱-t^۲, & \circ<t<۱\\ \circ, & \text{در غیراین‌صورت}\end{cases}$

(د) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-|t-۲n|}$





(الف)

شکل م٤-۲۱

۴-۲۲ سیگنال زمان- پیوستهٔ متناظر با هر یک از تبدیلهای زیر را تعیین کنید.

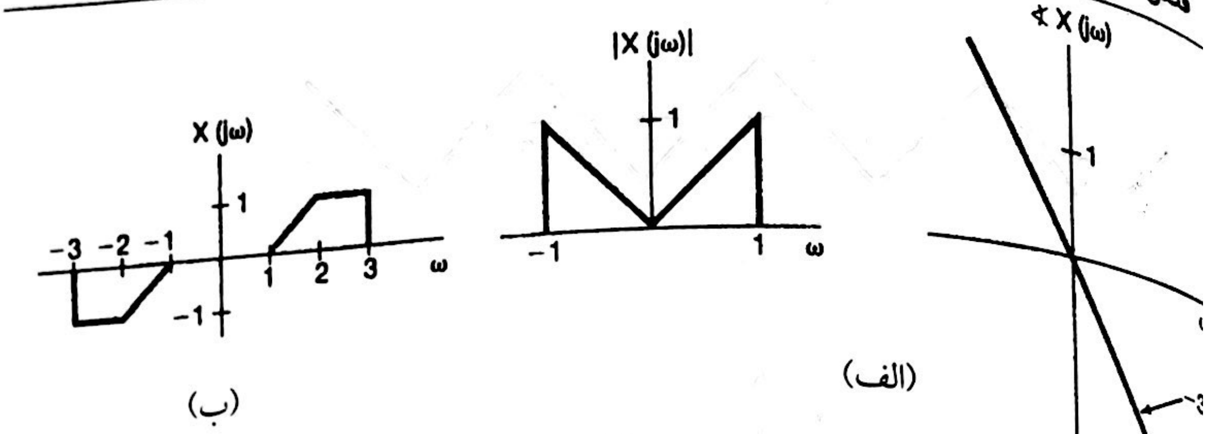
(الف) $X(j\omega)=\frac{\sin[۳(\omega-۲\pi)]}{(\omega-۲\pi)}$

(ب) $X(j\omega)=\cos(۴\omega+\pi/۳)$

(پ) $X(j\omega)$ به صورت نمودارهای اندازه و فاز در شکل م۴-۲۲ (الف)

(ت) $X(j\omega)=۲[\delta(\omega-۱)-\delta(\omega+۱)+۳[\delta(\omega-۲\pi)+\delta(\omega+۲\pi)]$

(ث) $X(j\omega)$ به صورت شکل م۴-۲۲ (ب)

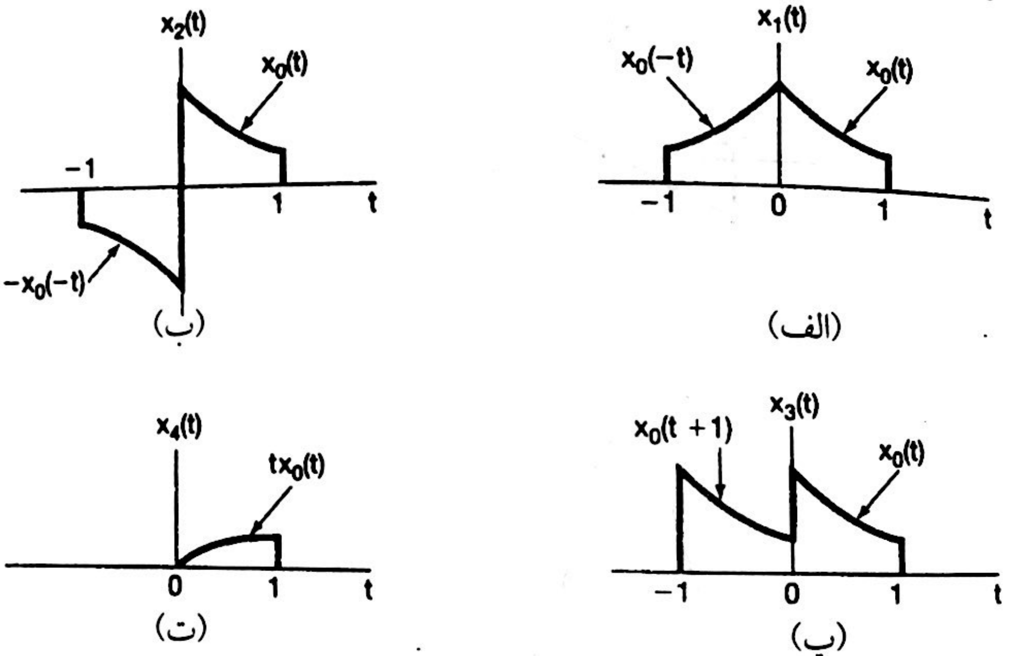


شکل م۴-۲۲

۴-۲۳ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x_\circ(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \circ \leq t \leq ۱ \\ \circ, & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}.$$

تبدیل فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های نشان داده شده در شکل م۴-۲۳ را تعیین کنید. شما باید بتوانید این کار را با محاسبهٔ صریح فقط تبدیل $x_\circ(t)$ و سپس استفاده از خواص تبدیل فوریه انجام دهید.



شکل م۴-۲۳

۴-۲۴ **(الف)** تعیین کنید که کدام یک ، اگر موجود باشد، از سیگنال‌های حقیقی نشان داده شده در شکل ۴-۲۴ دارای تبدیل فوریه‌ای هستند که در هر یک از شرایط زیر صدق می‌کند:

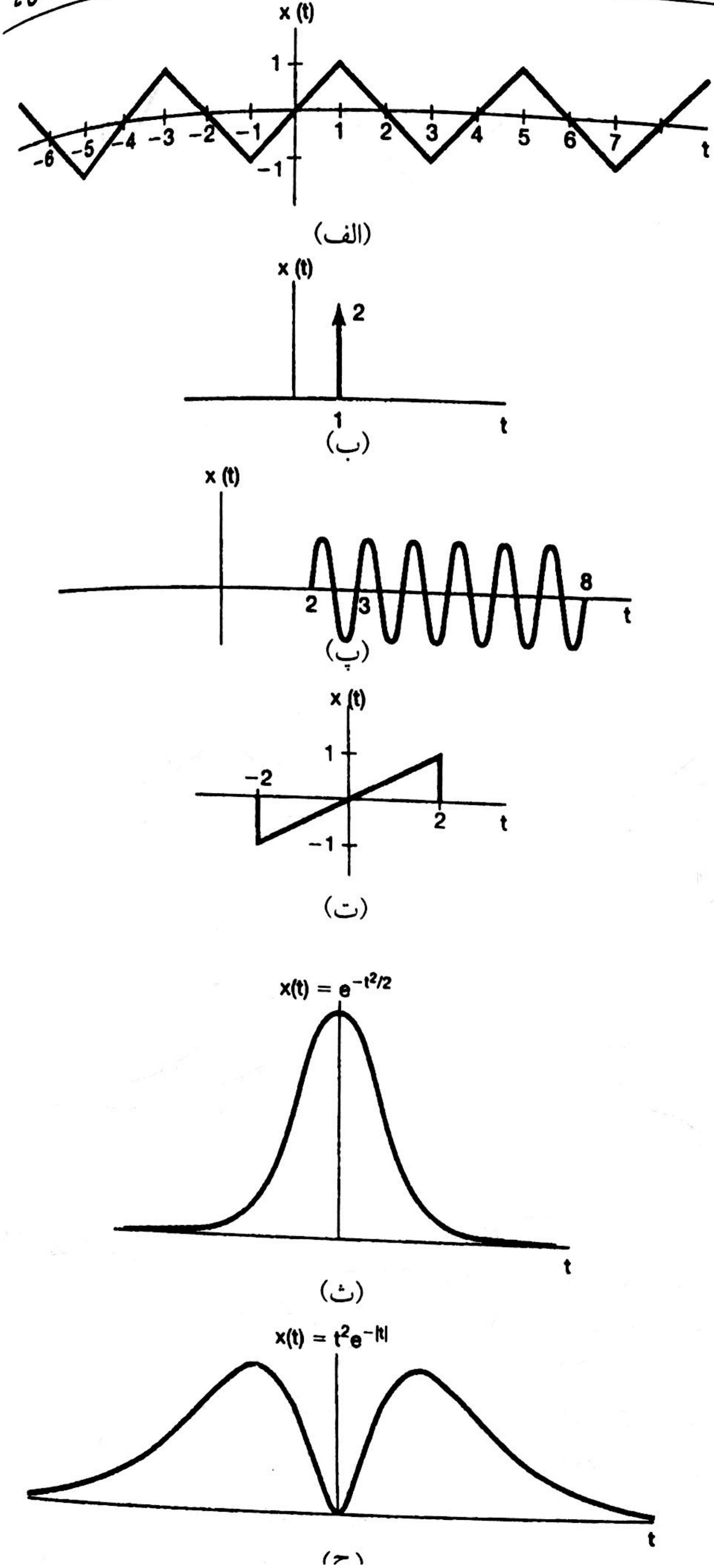
(۱) $\mathcal{R}e\{X(j\omega)\} = \circ$ (۲) $\mathcal{I}m\{X(j\omega)\} = \circ$

(۳) یک αی حقیقی وجود دارد به طوری که $e^{j\alpha\omega}X(j\omega)$ حقیقی است.

(۴) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,d\omega = \circ$ (۵) $\int_{-\infty}^{\infty} \omega X(j\omega)\,d\omega = \circ$

(۶) $X(j\omega)$ متناوب است.

(ب) سیگنالی بسازید که دارای خواص (۱)، (۴)، و (۵) بوده و خواص دیگر را نداشته باشد.


x (t)
1
−1
−6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7
t
(الف)
x (t)
2
1
t
(ب)
x (t)
2
3
8
t
(پ)
x (t)
1
−2
2
−1
t
(ت)
$x(t) = e^{-t^2/2}$
t
(ث)
$x(t) = t^2e^{-|t|}$
t
(ج)

شکل م٤-٢٤

۴-۲۵ فرض کنید که $X(j\omega)$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ سیگنال $x(t)$ ترسیم شده در شکل م ۴-۲۵ باشد.

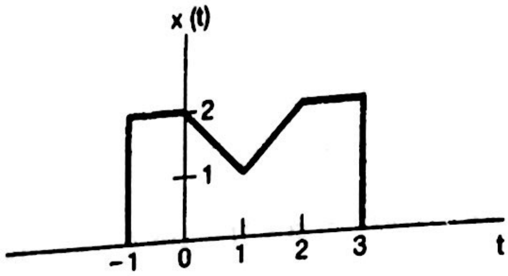
(الف) $\measuredangle X(j\omega)$ را بیابید. **(ب)** $X(j0)$ را بیابید.

(پ) $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)d\omega.$ را بیابید. **(ت)** $\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin\omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega.$ را محاسبه کنید.

(ث) $\int_{-\infty}^{\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega$ را محاسبه کنید.

(ج) عکس تبدیل فوریهٔ $\mathcal{R}e\{X(j\omega)\}$ را ترسیم کنید.

توجه: شما باید تمام این محاسبات را بدون محاسبهٔ صریح $X(j\omega)$ انجام دهید.



شکل م۴-۲۵

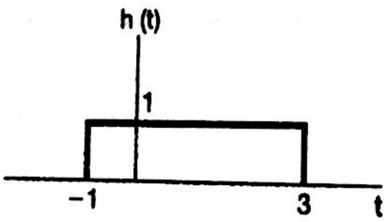
۴-۲۶ (الف) کانولوشن هر یک از زوج سیگنال‌های $x(t)$ و $h(t)$ زیر را با محاسبهٔ $X(j\omega)$ و $H(j\omega)$، استفاده از خاصیت کانولوشن، و گرفتن عکس تبدیل به دست آورید.

$$h(t) = e^{-4t}u(t) \quad , \quad x(t) = te^{-2t}u(t) \qquad (1)$$

$$h(t) = te^{-4t}u(t) \quad , \quad x(t) = te^{-2t}u(t) \qquad (2)$$

$$h(t) = e^{t}u(-t) \quad , \quad x(t) = e^{-t}u(t) \qquad (3)$$

(ب) فرض کنید که $x(t) = e^{-(t-2)}u(t-2)$ و $h(t)$ به صورت ترسیم شده در شکل م۴-۲۶ باشد. با نشان دادن این که تبدیل فوریهٔ $y(t) = x(t) * h(t)$ مساوی $H(j\omega)X(j\omega)$ است، درستی خاصیت کانولوشن را برای این زوج سیگنال تحقیق کنید.



شکل م۴-۲۶

۴-۲۷ سیگنال‌های

$$x(t) = u(t-1) - 2u(t-2) + u(t-3)$$

و

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t-kT)$$

را که در آن $T > 0$ است، در نظر بگیرید. فرض کنید a_k نشان دهندهٔ ضرایب سری فوریهٔ $\tilde{x}(t)$ و $X(j\omega)$ نشان دهندهٔ تبدیل فوریهٔ $x(t)$ باشد.

(الف) عبارتی به صورت بسته برای $X(j\omega)$ تعیین کنید.

(ب) عبارتی برای ضرایب فوریه a_k تعیین کرده و نشان دهید که $a_k = \frac{1}{T}X(j\frac{2\pi k}{T})$ می‌باشد.

۴-۲۸ (الف) فرض کنید $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ است، و فرض کنید $p(t)$ متناوب بوده و دارای نمایش سری فوریهٔ زیر است:

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn\omega_0 t}.$$

عبارتی برای تبدیل فوریهٔ سیگنال زیر تعیین کنید:

$$y(t) = x(t)p(t). \qquad (۱-۲۸-۴م)$$

(ب) فرض کنید که $X(j\omega)$ به صورت ترسیم شده در شکل م۴-۲۸ (الف) باشد. به ازای هر یک از انتخابهای زیر برای $p(t)$، طیف $y(t)$ در معادلهٔ (م۴-۲۸-۱) را رسم کنید:

(۱) $p(t) = \cos(t/2)$ (۲) $p(t) = \cos t$

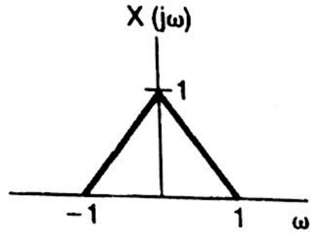
(۳) $p(t) = \cos 2t$ (۴) $p(t) = (\sin t)(\sin 2t)$

(۵) $p(t) = \cos 2t - \cos t$ (۶) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\pi n)$

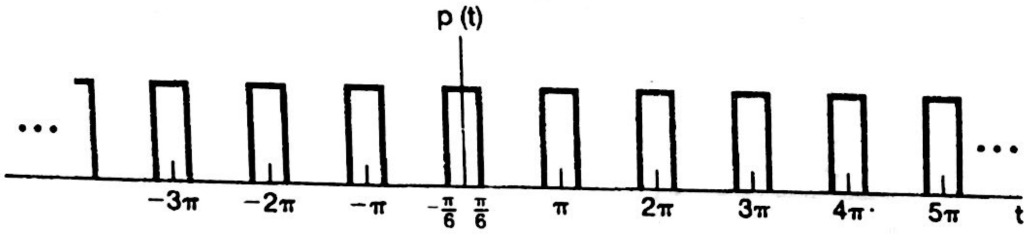
(۷) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n)$ (۸) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-4\pi n)$

(۹) $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2\pi n) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-\pi n)$

(۱۰) $p(t) =$ موج مربعی متناوب نشان داده شده در شکل م۴-۲۸ (ب)



(الف)

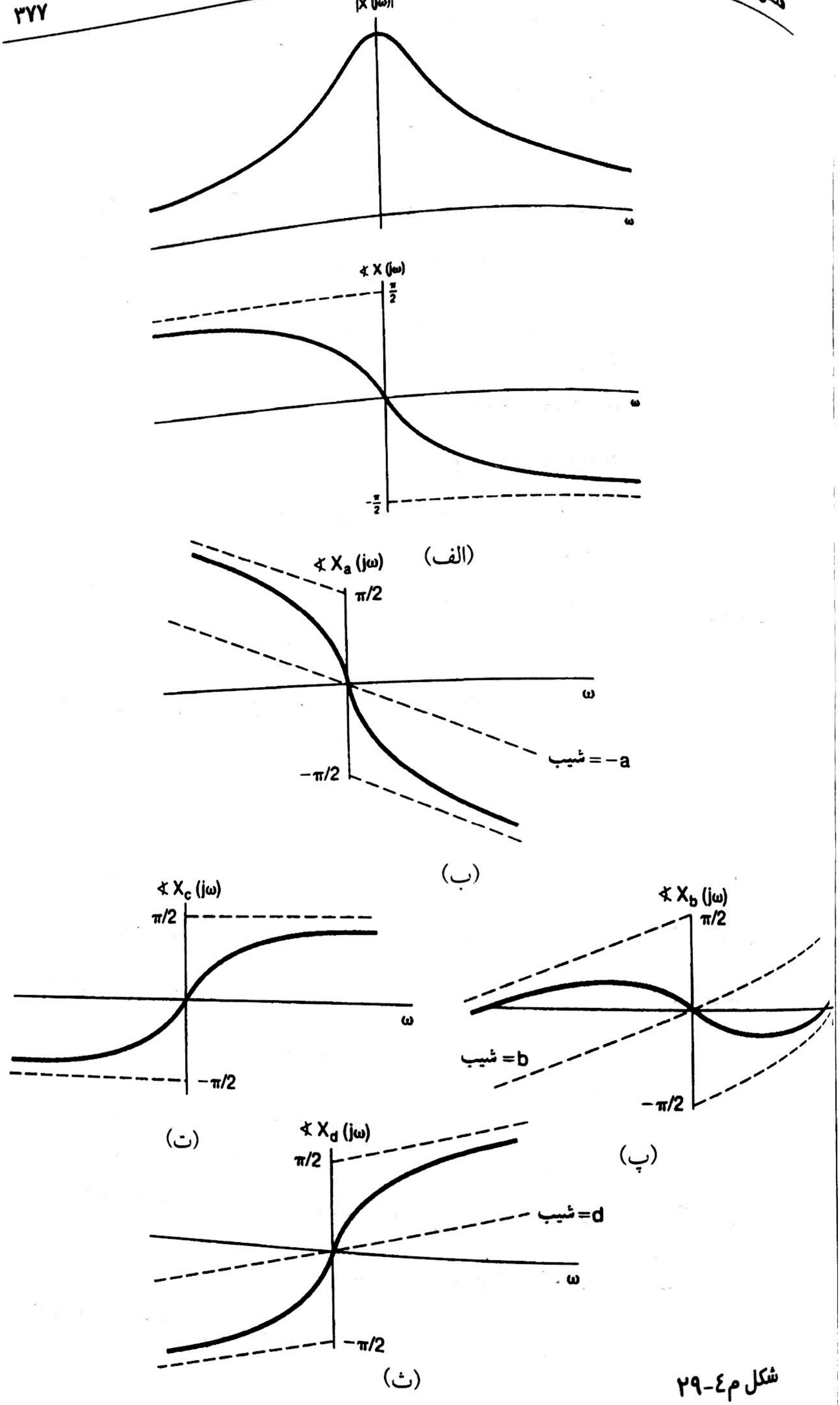


(ب)

شکل م٤-۲۸

۴-۲۹ تابع زمان- پیوسته با مقدار حقیقی $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ است که اندازه و فاز آن در شکل م۴-۲۹ (الف) رسم شده است.

توابع $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ دارای تبدیلهای فوریه‌ای هستند که اندازهٔ آنها همانند اندازهٔ $X(j\omega)$ بوده امّا توابع فاز آنها، چنان که در شکلهای م۴-۲۹(ب) تا (ث)نشان داده شده،متفاوت است. توابع فاز $\sphericalangle X_a(j\omega)$ و $\sphericalangle X_b(j\omega)$ با افزودن یک فاز خطی به $\sphericalangle X(j\omega)$ به دست آمده‌اند. تابع $\sphericalangle X_c(j\omega)$ با انعکاس $\sphericalangle X(j\omega)$ حول $\omega = 0$، و $\sphericalangle X_d(j\omega)$ با ترکیبی از انعکاس و افزودن یک فاز خطی به دست آمده‌اند. با استفاده از خواص تبدیل فوریه عبارتهایی را برای $x_a(t)$، $x_b(t)$، $x_c(t)$، و $x_d(t)$ برحسب $x(t)$ تعیین کنید.


|X (jω)|
ω
∢ X (jω)
π/2
ω
-π/2
(الف)
∢ Xa (jω)
π/2
ω
شیب = −a
−π/2
(ب)
∢ Xc (jω)
π/2
ω
−π/2
(ت)
∢ Xb (jω)
π/2
شیب = b
−π/2
(پ)
∢ Xd (jω)
π/2
شیب = d
ω
−π/2
(ث)

شکل م٤-۲۹

۴-۳۰ فرض کنید $g(t) = x(t)\cos t$ بوده و تبدیل فوریهٔ $g(t)$ به صورت زیر باشد:

$$G(j\omega) = \begin{cases} ۱, & |\omega| \leq ۲ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

(الف) $x(t)$ را تعیین کنید.

(ب) تبدل فوریه $X_۱(j\omega)$ از سیگنال $x_۱(t)$ را چنان مشخص کنید که:

$$g(t) = x_۱(t)\cos\left(\frac{۲}{۳}t\right).$$

۴-۳۱ (الف) نشان دهید که سه سیستم LTI با پاسخهای ضربهٔ زیر:

$$h_۱(t) = u(t),$$

$$h_۲(t) = -۲\delta(t) + ۵e^{-۲t}u(t),$$

و

$$h_۳(t) = ۲te^{-t}u(t)$$

همگی دارای پاسخ یکسانی به $x(t) = \cos t$ هستند.

(ب) پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI دیگر را با همان پاسخ به $\cos t$ بیابید.

این مسأله، این واقعیت را روشن می‌سازد که نمی‌توان از پاسخ به $\cos t$ برای مشخص کردن یکتای یک سیستم LTI استفاده کرد.

۴-۳۲ سیستم LTI ی S با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h(t) = \frac{\sin(۴(t-۱))}{\pi(t-۱)}.$$

خروجی S را به ازای هر یک از ورودیهای زیر تعیین کنید:

(الف) $x_۱(t) = \cos(۶t + \frac{\pi}{۲})$ **(ب)** $x_۲(t) = \sum_{k=۰}^{\infty} (\frac{۱}{۲})^k \sin(۳kt)$

(پ) $x_۳(t) = \dfrac{\sin(۴(t+۱))}{\pi(t+۱)}$ **(ت)** $x_۴(t) = (\frac{\sin ۲t}{\pi t})^۲$

۴-۳۳ ورودی و خروجی یک سیستم LTI علّی با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{d^۲y(t)}{dt^۲} + ۶\frac{dy(t)}{dt} + ۸y(t) = ۲x(t)$$

(الف) پاسخ ضربهٔ این سیستم را بیابید.

(ب) اگر $x(t) = te^{-۲t}u(t)$ باشد، پاسخ این سیستم برابر چیست؟

(پ) قسمت (الف) را برای سیستم LTI علّی توصیف شده با معادلهٔ زیر تکرار کنید:

$$\frac{d^۲y(t)}{dt^۲} + \sqrt{۲}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ۲\frac{d^۲x(t)}{dt^۲} - ۲x(t)$$

۴-۳۴ سیستم LTI علّی و پایدار S دارای پاسخ فرکانسی زیر است:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + ۴}{۶ - \omega^۲ + ۵j\omega}.$$

(الف) معادلهٔ دیفرانسیلی راکه ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ از S را به هم مرتبط می‌سازد، تعیین کنید.

(ب) پاسخ ضربهٔ $h(t)$ را برای S تعیین کنید.

(پ) اگر ورودی به صورت زیر باشد، خروجی S برابر چیست؟

$$x(t) = e^{-۴t}u(t) - te^{-۴t}u(t).$$

۴-۳۵ در این مسأله مثالهایی در بارهٔ اثرات تغییرات غیرخطی در فاز ارائه می‌شود.

(الف) سیستم LTI زمان-پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر را درنظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \frac{a - j\omega}{a + j\omega},$$

که در آن $a > ۰$ است. اندازهٔ $H(j\omega)$ برابر چیست؟ $\sphericalangle H(j\omega)$ برابر چیست؟ پاسخ ضربهٔ این سیستم برابر چیست؟

(ب) خروجی سیستم قسمت (الف) با $a = ۱$ را وقتی که ورودی به صورت زیر است، تعیین کنید:

$$\cos(t/\sqrt{۳}) + \cos t + \cos\sqrt{۳}t.$$

هم ورودی و هم خروجی را به طور تقریبی رسم کنید.

۴-۳۶ یک سیستم LTI را درنظر بگیرید که پاسخ آن به ورودی

$$x(t) = [e^{-t} + e^{-۳t}]u(t)$$

به صورت زیر است:

$$y(t) = [۲e^{-t} - ۲e^{-۴t}]u(t).$$

(الف) پاسخ فرکانسی این سیستم را به دست آورید.

(ب) پاسخ ضربهٔ سیستم را تعیین کنید.

(پ) معادلهٔ دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ ورودی و خروجی این سیستم را به دست آورید.

مسائل پیشرفته

۴-۳۷ سیگنال $x(t)$ در شکل م۴-۳۷ را درنظر بگیرید.

(الف) تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ از $x(t)$ را بیابید.

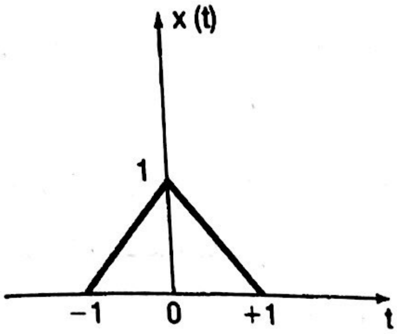
(ب) سیگنال زیر را رسم کنید:

$$\tilde{x}(t) = x(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - ۴k).$$

(پ) یک سیگنال دیگر $g(t)$ را چنان بیابید که $g(t)$ همانند $x(t)$ نبوده و :

$$\tilde{x}(t) = g(t) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - ۴k).$$

(ت) نشان دهید که اگر چه $G(j\omega)$ متفاوت با $X(j\omega)$ است، امّا برای تمام اعداد صحیح k داریم: $G(j\frac{\pi k}{۲}) = X(j\frac{k\pi}{۲})$. برای جواب دادن به این سوال نباید $G(j\omega)$ را صریحاً محاسبه کنید.



شکل م٤-۳۷

۴-۳۸ فرض کنید $x(t)$ سیگنال دلخواهی با تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ باشد. خاصیت انتقال فرکانسی تبدیل فوریه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$e^{j\omega_\circ t}x(t) \overset{\mathfrak{F}}{\longleftrightarrow} X(j(\omega - \omega_\circ)).$$

(الف) خاصیت انتقال فرکانسی را با اعمال انتقال فرکانسی به معادلهٔ تحلیل ثابت کنید:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}\, dt.$$

(ب) خاصیت انتقال فرکانسی را با استفاده از تبدیل فوریهٔ $e^{j\omega_\circ t}$ به همراه خاصیت ضرب تبدیل فوریه، ثابت کنید.

۴-۳۹ فرض کنید که سیگنال $x(t)$ دارای تبدیل فوریهٔ $X(j\omega)$ باشد. اکنون، سیگنال دیگر $g(t)$ راکه شکل آن همانند شکل $X(j\omega)$ است، درنظر بگیرید؛ یعنی:

$$g(t) = X(jt).$$

(الف) نشان دهید که تبدیل فوریهٔ $G(j\omega)$ از $g(t)$ دارای شکل یکسانی با $۲\pi x(-t)$ است؛ یعنی نشان دهید که:

$$G(j\omega) = ۲\pi x(-\omega).$$

(ب) با استفاده از این واقعیت که:

$$\mathfrak{F}\{\delta(t + B)\} = e^{jB\omega}$$

است، به همراه نتیجهٔ قسمت (الف)، نشان دهیدکه:

$$\mathfrak{F}\{e^{jBt}\} = ۲\pi\delta(\omega - B).$$

۴-۴۰ از خواص تبدیل فوریه استفاده کرده و با استقراء نشان دهید که تبدیل فوریهٔ

$$x(t) = \frac{t^{n-۱}}{(n-۱)!} e^{-at}\, u(t), \quad a > \circ,$$

برابر است با:

$$\frac{۱}{(a + j\omega)^n}.$$

۴-۴۱ در این مسأله خاصیت ضرب تبدیل فوریهٔ زمان- پیوسته را به دست می‌آوریم. فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال زمان- پیوسته به ترتیب با تبدیلهای فوریهٔ $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ باشند. همچنین فرض کنید $g(t)$ نشان دهندهٔ عکس تبدیل فوریهٔ $\frac{۱}{۲\pi}\{X(j\omega) * Y(j\omega)\}$ باشد.

(الف) نشان دهید که:

$$g(t) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\theta)\left[\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}\, d\omega\right] d\theta .$$

(ب) نشان دهیدکه :

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} Y(j(\omega-\theta))e^{j\omega t}\, d\omega = e^{j\theta t}\, y(t).$$

(پ) با ترکیب نتایج قسمتهای (الف) و (ب)، نتیجه بگیرید که:

$$g(t) = x(t)y(t).$$

۴-۴۲ فرض کنید:

$$g_۱(t) = \{[\cos(\omega_\circ t)]x(t)\} * h(t) \quad \text{و} \quad g_۲(t) = \{[\sin(\omega_\circ t)]x(t)\} * h(t),$$

باشند که در آنها:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk۱\circ\circ t}$$

یک سیگنال متناوب با مقدار حقیقی بوده و $h(t)$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI پایدار است.

(الف) مقداری برای $\omega_\circ$ و محدودیتهای لازمی روی $H(j\omega)$ چنان مشخص کنید که لزوماً داشته باشیم:

$$g_۱(t) = \mathcal{R}e\{a_۵\} \quad \text{و} \quad g_۲(t) = \mathcal{I}m\,\{a_۵\}.$$

(ب) مثالی برای $h(t)$ چنان ارائه دهید که $H(j\omega)$ در محدودیتهایی که در قسمت (الف) مشخص کرده‌اید، صدق کند.

۴-۴۳ فرض کنید:

$$g(t) = x(t)\cos^۲ t * \frac{\sin t}{\pi t} .$$

با فرض این که $x(t)$ حقیقی است و برای $|\omega| \geq ۱$، $X(j\omega) = \circ$ است، نشان دهید که یک سیستم LTI ی S وجود دارد چنان که :

$$x(t) \xrightarrow{S} g(t) .$$

۴-۴۴ خروجی $y(t)$ از یک سیستم LTI علّی با معادلهٔ زیر به ورودی $x(t)$ مرتبط می‌شود:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ۱\circ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)z(t-\tau)\, d\tau - x(t),$$

که در آن $z(t) = e^{-t}u(t) + ۳\delta(t)$ است.

(الف) پاسخ فرکانسی $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$ را برای این سیستم به دست آو

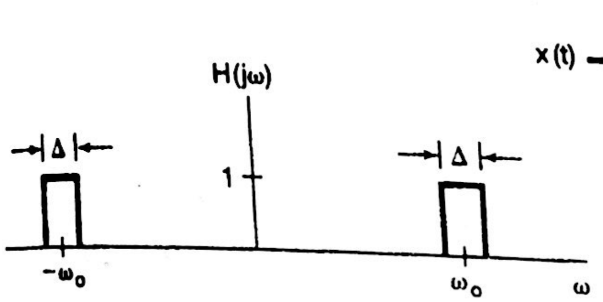
(ب) پاسخ ضربهٔ سیستم را تعیین کنید.

۴-۴۵ در بحث رابطهٔ پارسوال برای سیگنال‌های زمان- پیوسته در بخش ۴-۳-۷ دیدیم که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2 d\omega \quad .$$

این بدان معنی است که انرژی کل سیگنال را می‌توان با انتگرال‌گیری از $|X(j\omega)|^2$ روی تمام فرکانس‌ها به دست آورد. اکنون سیگنال با مقدار حقیقی $x(t)$ را درنظر بگیرید که با فیلتر میان گذر ایده‌آل $H(j\omega)$ نشان داده شده در شکل م۴-۴۵ مورد پردازش قرار می‌گیرد. انرژی موجود در سیگنال خروجی $y(t)$ را به صورت یک انتگرال‌گیری روی فرکانس $|X(j\omega)|^2$ بیان کنید. برای Δ یی چنان کوچک که $|X(j\omega)|$ در یک بازهٔ فرکانس با پهنای Δ تقریباً ثابت باشد، نشان دهید که انرژی موجود در خروجی $y(t)$ فیلتر میان گذر تقریباً با $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ متناسب است.

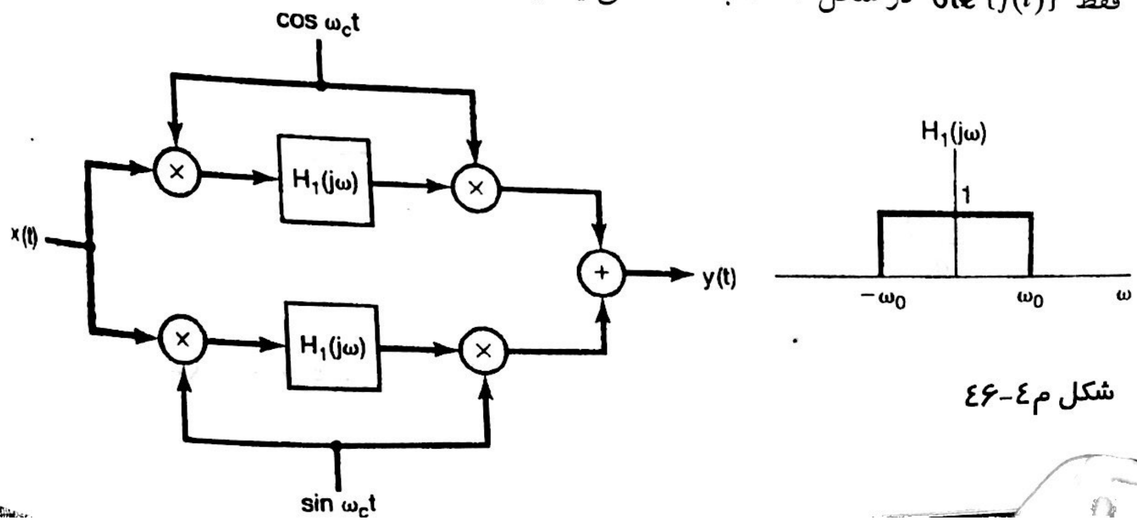
براساس نتیجهٔ فوق، $\Delta|X(j\omega_0)|^2$ متناسب با انرژی موجود در سیگنال در یک پهنای باند Δ در اطراف فرکانس ω_0 است. بدین‌دلیل $|X(j\omega)|^2$ را اغلب طیف چگالی انرژی سیگنال $x(t)$ می‌نامند.



شکل م٤٥

۴-۴۶ در بخش ۴-۵-۱، استفاده از مدولاسیون دامنه با یک حامل نمایی مختلط را برای پیاده سازی یک فیلتر میان گذر مورد بحث قرار دادیم. سیستم مورد نظر در شکل ۴-۲۶ نشان داده شده، و اگر فقط جزء حقیقی $f(t)$ نگه داشته شود، فیلتر میان گذر معادل همان است که در شکل ۴-۳۰ نشان داده شده است.

شکل م۴-۴۶ یک پیاده سازی فیلتر میان گذر را با استفاده از مدولاسیون سینوسی و فیلترهای پایین گذر نشان می‌دهد. نشان دهید که خروجی $y(t)$ این سیستم با آن‌چه که از نگهداشتن فقط $\mathcal{R}e\{f(t)\}$ در شکل ۴-۲۶ به دست می‌آید، یکسان است.



شکل م٤-٤٦

۴۷-۴ یک خاصیت مهم پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ برای سیستمی با پاسخ ضربهٔ حقیقی و علّی $h(t)$ آن است که $H(j\omega)$ به طور کامل با جزء حقیقی‌اش، $\mathcal{R}e\{H(j\omega)\}$، مشخص می‌شود. مسألهٔ حاضر مربوط می‌شود به بدست آوردن و تشریح برخی از معانی ضمنی این خاصیت که در حالت کلی آن را کفایت جزء حقیقی می‌نامند.

(الف) با بررسی سیگنال $h_e(t)$ که برابر جزء زوج $h(t)$ است، خاصیت کفایت جزء حقیقی را ثابت کنید. تبدیل فوریهٔ $h_e(t)$ برابر چیست؟ نشان دهید که چگونه می‌توان $h(t)$ را از روی $h_e(t)$ بدست آورد.

(ب) اگر جزء حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علّی به صورت زیر باشد:

$$\mathcal{R}e\{H(j\omega)\} = \cos\omega,$$

$h(t)$ برابر چیست؟

(پ) نشان دهید که می‌توان $h(t)$ را برای هر مقدار از t بجز $t = ۰$ از روی $h_o(t)$، جزء فرد $h(t)$، به دست آورد. توجه کنید که اگر $h(t)$ شامل هیچگونه ویژگی [$\delta(t)$، $u_1(t)$، $u_2(t)$، و غیره] در $t = ۰$ نباشد، آنگاه پاسخ فرکانسی

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

وقتی که $h(t)$ در نقطهٔ منفرد $t = ۰$ برابر یک مقدار محدود دلخواهی قرار داده می‌شود، تغییر نخواهد کرد. بدین ترتیب نشان دهید که در این حالت نیز $H(j\omega)$ به طور کامل با جزء موهومی‌اش مشخص می‌شود.

مسائل تعمیمی

۴۸-۴ سیستمی را درنظر بگیرید که پاسخ ضربهٔ حقیقی و علّی $h(t)$ آن هیچ نوع ویژگی در $t = ۰$ نداشته باشد. در مسألهٔ ۴-۴۷ دیدیم که جزء حقیقی و یا جزء موهومی $H(j\omega)$، آن را به طور کامل مشخص می‌کنند. در این مسأله رابطهٔ صریحی را بین $H_R(j\omega)$ و $H_I(j\omega)$، جزءهای حقیقی و موهومی $H(j\omega)$، به دست می‌آوریم.

(الف) برای شروع، توجه کنید که چون $h(t)$ علّی است، بنابراین بجز احتمالاً در $t = ۰$، داریم:

$$h(t) = h(t)u(t). \qquad (م۴-۴۸-۱)$$

حال، چون $h(t)$ هیچگونه ویژگی در $t = ۰$ ندارد، تبدیل فوریهٔ هر دو طرف معادلهٔ (م۴-۴۸-۱) باید یکسان باشند. از این واقعیت به همراه خاصیت ضرب استفاده کرده و نشان دهید که:

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(j\eta)}{\omega - \eta}\, d\eta.$$ (م۴-۴۸-۲)

از معادلهٔ (م۴-۴۸-۲) استفاده کرده و عبارتی برای $H_R(j\omega)$ برحسب $H_I(j\omega)$ و همچنین عبارتی برای $H_I(j\omega)$ برحسب $H_R(j\omega)$ تعیین کنید.

(ب) عملِ

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau}\, d\tau$$ (م۴-۴۸-۳)

را تبدیل هیلبرت می‌نامند. هم‌اکنون دیدیم که جزءهای حقیقی و موهومی تبدیل فوریه پاسخ ضربهٔ حقیقی و علّی $h(t)$ را می‌توان از روی یکدیگر با استفاده از تبدیل هیلبرت تعیین کرد. اکنون، معادلهٔ (م ۴-۴۸-۳) را در نظر بگیرید و $y(t)$ را به عنوان خروجی یک سیستم LTI با ورودی $x(t)$ تلقی کنید. نشان دهید که پاسخ فرکانسی این سیستم به صورت زیر است:

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases}.$$

(پ) تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t) = \cos 3t$ برابر چیست؟

۴-۴۹ فرض کنید $H(j\omega)$ پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI زمان- پیوسته باشد، و فرض کنید که $H(j\omega)$ حقیقی، زوج، و مثبت است. همچنین فرض کنید که :

$$\max_{\omega}\{H(j\omega)\} = H(0).$$

(الف) نشان دهید که:

(۱) پاسخ ضربه ، $h(t)$ ، حقیقی است.

(۲) $\max\{|h(t)|\} = h(0)$.

راهنمایی: اگر $f(t, \omega)$ یک تابع مختلط از دو متغیر باشد، آنگاه:

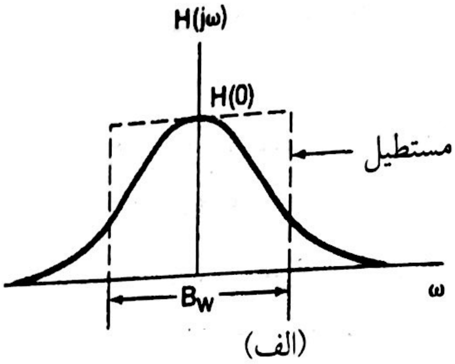
$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t,\omega)\, d\omega\right| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t,\omega)|\, d\omega.$$

(ب) یک مفهوم مهم در تحلیل سیستم، پهنای باند یک سیستم LTI است. چندین روش ریاضی مختلف برای تعریف پهنای باند وجود دارد، امّا همهٔ آنها به این ایدهٔ کیفی و حسی مربوط می‌شوند که یک سیستم با پاسخ فرکانسی $G(j\omega)$ به ازای مقادیری از ω که در آنها $G(j\omega)$ صفر می‌شود یا کوچک است، سیگنال‌هایی به صورت $e^{j\omega t}$ را اساساً "متوقف می‌کند" و در باندی از فرکانس که در آن $G(j\omega)$ کوچک نباشد، این نمایی‌های مختلط را "عبور می‌دهد". عرض این باند برابر پهنای باند است. این مفاهیم در فصل ۶ بسیار واضح‌تر خواهند شد امّا فعلاً تعریف خاصی از پهنای باند را برای آن سیستم‌هایی که پاسخهای فرکانسی آنها دارای

خواصی هستند که پیشتر برای $H(j\omega)$ مشخص شد، درنظر می‌گیریم. مشخصاً، یک تعریف پهنای باید B_w برای چنین سیستمی، عبارت است از پهنای مستطیلی به ارتفاع $H(j\circ)$ که دارای مساحتی برابر سطح‌زیر $H(j\omega)$ است. این تعریف در شکل م۴-۴۹ (الف) به تصویر درآمده است. توجه کنید که چون $H(j\circ) = \max_\omega H(j\omega)$ فرکانس‌های داخل باند نشان داده شده در شکل، فرکانس‌هایی هستند که در آنها $H(j\omega)$ بیشترین مقدار را دارد. البته انتخاب دقیق پهنا در شکل تا حدودی اختیاری است، امّا تعریفی که انتخاب کرده‌ایم این امکان را به ما می‌دهد که سیستم‌های مختلف را با هم مقایسه کنیم و یک رابطهٔ بسیار مهم بین زمان و فرکانس را دقیقاً بیان کنیم.

پهنای باند سیستمی با پاسخ فرکانسی زیر برابر چیست؟

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ \circ, & |\omega| > W \end{cases},$$



شکل م٤-٤٩ (الف)

(پ) عبارتی را برای پهنای باند $H(j\omega)$ برحسب B_w بیابید.

(ت) فرض کنید $s(t)$ نشان دهندهٔ پاسخ پلهٔ سیستم مشخص شده در قسمت (الف) باشد. یک معیار مهم در خصوص سرعت پاسخ یک سیستم عبارت است از زمان صعود که مثل پهنای باند، دارای یک تعریف کیفی است و این منجر به چندین تعریف ریاضی ممکن می‌شود که ما از یکی از آنها استفاده خواهیم کرد. به طور حسی، زمان صعود یک سیستم معیاری است که نشان می‌دهد پاسخ پله تا چه حد سریع از صفر به مقدار نهایی خود،

$$s(\infty) = \lim_{t\to\infty} s(t),$$

می‌رسد. بنابراین هرچه زمان صعود کوچکتر باشد، پاسخ سیستم سریعتر است. برای سیستم مورد نظر در این مسأله، زمان صعود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

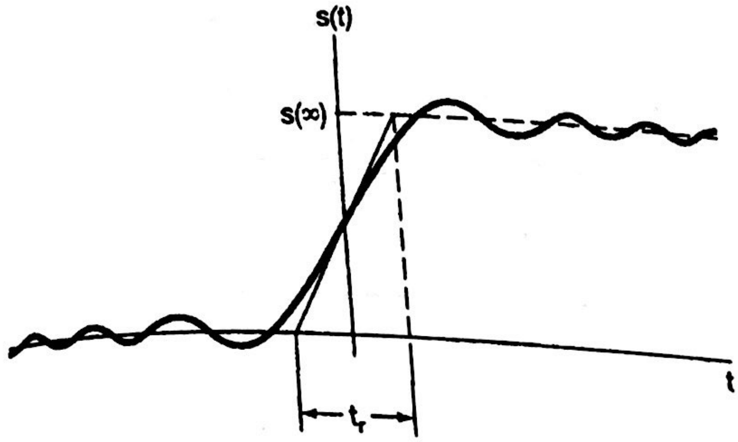
$$t_r = \frac{s(\infty)}{h(\circ)}.$$

چون

$$s'(t) = h(t)$$

می‌باشد و همچنین به دلیل این خاصیت که $h(0) = \max_t h(t)$ است، t_r برابر مدت زمانی است که پاسخ پله ضمن آن که بیشترین نرخ تغییر $s(t)$ را حفظ می‌کند، از صفر به $s(\infty)$ می‌رسد. این مطلب در شکل م۴-۴۹ (ب) نشان داده شده است.

عبارتی را برای t_r برحسب $H(j\omega)$ بیابید.



شکل م٤-٤٩ (ب)

(ث) نتایج قسمتهای (پ) و (ت) را ترکیب کرده و نشان دهید که:

$$B_w t_r = ۲\pi. \qquad \text{(م۴-۴۹-۱)}$$

بنابراین نمی‌توان به طور مستقل هم زمان صعود و هم پهنای باند سیستم را مشخص کرد. به عنوان مثال، معادلهٔ (م۴-۴۹-۱) مبیّن آن است که اگر یک سیستم سریع بخواهیم (t_r کوچک)، سیستم باید پهنای باند بزرگی داشته باشد. این یک مصالحهٔ اساسی است که در بسیاری از مسائل طراحی سیستم از اهمیت عمده‌ای برخوردار است.

۴-۵۰ در مسائل ۱-۴۵ و ۲-۶۷ چند خاصیت و موارد استفادهٔ توابع همبستگی را تعریف و بررسی کردیم. در مسألهٔ حاضر، خواص چنین توابعی را در حوزهٔ فرکانس بررسی می‌کنیم. فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال حقیقی باشند. آنگاه تابع همبستگی متقابل $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau.$$

به طور مشابه، می‌توان $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$ ، و $\phi_{yy}(t)$ را تعریف کرد. [دو تابع آخر را به ترتیب توابع خودهمبستگی سیگنال‌های $x(t)$ و $y(t)$ می‌نامند.] فرض کنید $\Phi_{xy}(j\omega)$ ، $\Phi_{yx}(j\omega)$، $\Phi_{xx}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ به ترتیب نشان دهندهٔ تبدیلهای فوریهٔ $\phi_{xy}(t)$، $\phi_{yx}(t)$، $\phi_{xx}(t)$، و $\phi_{yy}(t)$ باشند.

(الف) رابطهٔ بین $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yx}(j\omega)$ چیست؟

(ب) عبارتی برای $\Phi_{xy}(j\omega)$ برحسب $X(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بیابید.

(پ) نشان دهید که $\Phi_{xx}(j\omega)$ به ازای هر ω حقیقی و نامنفی است.

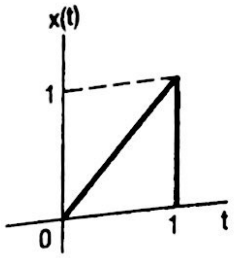
(ت) حال فرض کنید که $x(t)$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای با مقدار حقیقی و پاسخ فرکانسی $H(j\omega)$ بوده و $y(t)$ خروجی باشد. عبارتهای را برای $\Phi_{xy}(j\omega)$ و $\Phi_{yy}(j\omega)$ برحسب $\Phi_{xx}(j\omega)$ و $H(j\omega)$ بیابید.

(ث) فرض کنید $x(t)$ چنان باشد که در شکل م۴-۵۰ تصویر شده است و فرض کنید پاسخ ضربهٔ سیستم LTI به صورت $h(t) = e^{-at}u(t)$، $a > 0$، باشد. $\Phi_{xx}(j\omega)$، $\Phi_{xy}(j\omega)$، و $\Phi_{yy}(j\omega)$ را با استفاده از نتایج قسمتهای (الف) تا (ت) محاسبه کنید.

(ج) فرض کنید که تبدیل فوریهٔ زیر از تابع $\phi(t)$ داده شده است.

$$\Phi(j\omega) = \frac{\omega^2 + 100}{\omega^2 + 25}.$$

پاسخهای ضربهٔ دو سیستم LTI علّی و پایدار را که دارای توابع خود همبستگی برابر $\phi(t)$ هستند، بیابید. کدام یک از اینها دارای معکوس علّی و پایدار است؟



شکل م٤-۵۰

۴-۵۱ (الف) دو سیستم LTI را به ترتیب با پاسخهای ضربهٔ $h(t)$ و $g(t)$ درنظر بگیرید و فرض کنید که این سیستم‌ها معکوس یکدیگر هستند. همچنین فرض کنید که سیستم‌ها به ترتیب دارای پاسخهای فرکانسی نشان داده شده با $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ باشند. رابطهٔ بین $H(j\omega)$ و $G(j\omega)$ چیست؟

(ب) سیستم LTI زمان-پیوسته با پاسخ فرکانسی زیر را درنظر بگیرید:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & 2 < |\omega| < 3 \\ 0, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}.$$

(۱) آیا ممکن است که بتوان یک ورودی $x(t)$ به این سیستم چنان یافت که خروجی به صورت نشان داده شده در شکل م۴-۵۰ باشد؟ اگر چنین است، $x(t)$ را بیابید. اگر چنین نیست، توضیح دهید که چرا.

(۲) آیا این سیستم معکوس‌پذیر است؟ جواب خود را توضیح دهید.

(پ) تالاری را درنظر بگیرید که مشکل پژواک دارد. همان‌طور که در مسألهٔ ۲-۶۴ مطرح شد، می‌توان اکوستیک تالار را به صورت یک سیستم LTI مدل کرد که پاسخ ضربهٔ آن متشکل از یک قطار ضربه است به طوری که ضربهٔ k ام در این قطار متناظر با k اُمین پژواک است. فرض کنید که در این حالت خاص، پاسخ ضربه به صورت زیر باشد:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT}\,\delta(t-kT),$$

که در آن ضریب e^{-kT} نشان دهندهٔ تضعیف پژواک kام است.

برای آن که صدای صحنه را با کیفیت بالایی ضبط کنیم، باید اثر پژواک موجود در صداهای دریافت شده توسط دستگاه ضبط را با انجام نوعی پردازش حذف نماییم. در مسألهٔ ۲-۶۴ از روش کانولوشن استفاده کرده و یک مثال از طراحی چنین پردازشگری را (برای یک مدل اکوستیکی متفاوت) مطرح کردیم. در مسألهٔ حاضر از روش حوزهٔ فرکانس استفاده خواهیم کرد. مشخصاً فرض کنید $G(j\omega)$ نشان دهندهٔ پاسخ فرکانسی سیستم LTIیی باشد که برای پردازش سیگنال صوتی دریافت شده به کار می‌رود. $G(j\omega)$ را چنان انتخاب کنید که پژواکها کاملاً حذف شده و سیگنال حاصل، باز تولید درستی از صداهای اصلی صحنه باشد.

(ت) معادلهٔ دیفرانسیل معکوس سیستمی با پاسخ ضربهٔ زیر را بیابید:

$$h(t) = 2\delta(t) + u_1(t).$$

(ث) یک سیستم LTI در سکون اولیه را درنظر بگیرید که با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 9y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t).$$

معکوس این سیستم نیز در حالت سکون اولیه بوده و با یک معادلهٔ دیفرانسیل توصیف می‌شود. معادلهٔ دیفرانسیلی راکه سیستم معکوس را توصیف می‌کند، بیابید و پاسخهای ضربهٔ $h(t)$ و $g(t)$ سیستم اصلی و معکوس آن را به دست آورید.

۴-۵۲ سیستم‌های معکوس اغلب در مورد مسائلی که شامل دستگاههای اندازه گیری نادقیق هستند، کاربرد پیدا می‌کنند. به عنوان مثال، دستگاه اندازه گیری دمای یک مایع را درنظر بگیرید. غالباً منطقی است که چنین دستگاهی را به صورت یک سیستم LTI مدل کنیم زیرا ویژگیهای واکنشی عنصر اندازه گیر (مثل جیوه در دماسنج) به طور لحظه‌ای به تغییرات دما پاسخ نمی‌دهد. به‌خصوص، فرض کنید که پاسخ این دستگاه به یک پلهٔ واحد در دما به صورت زیر است:

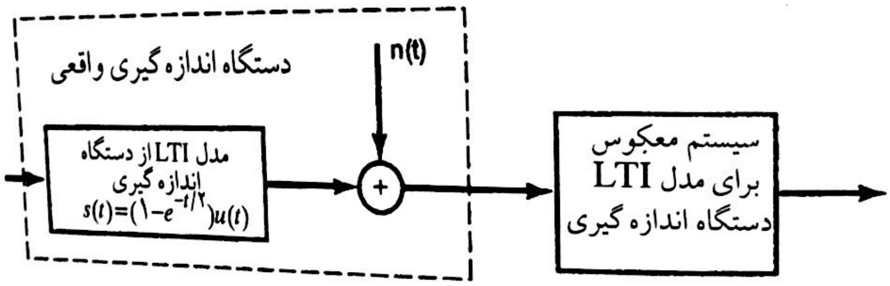
$$s(t) = (1 - e^{-t/2})u(t). \qquad \text{(م۴-۵۲-۱)}$$

(الف) یک سیستم جبران کننده چنان طراحی کنید که وقتی خروجی دستگاه اندازه گیری به آن اعمال شود، خروجی‌ای تولید کند که برابر دمای لحظه‌ای مایع باشد.

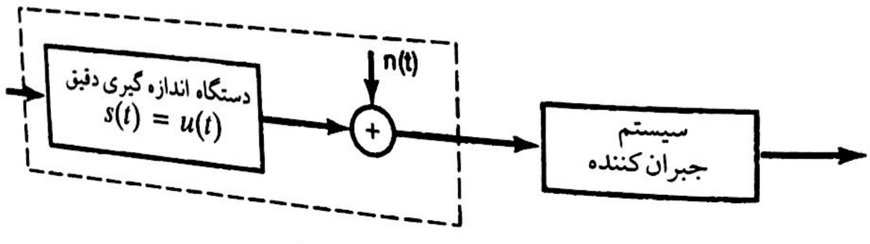
(ب) یکی از مسائلی که اغلب در خصوص استفاده از سیستم‌های معکوس به عنوان جبران کننده‌های دستگاههای اندازه گیری پیش می‌آید این است که اگر در خروجی واقعی دستگاه اندازه گیری، به سبب بروز اثرات غیرعادی جزئی در دستگاه، خطاهایی ایجاد شود، ممکن

است که به اشتباهات فاحشی در دمای نشان داده شده منجر شود. چون در سیستم‌های واقعی همواره چنین منابع خطایی وجود دارند، باید آنها را به حساب آورد. برای تشریح این مطلب، یک دستگاه اندازه گیری را درنظر بگیرید که خروجی کل آن را بتوان به صورت مجموع پاسخ دستگاه اندازه گیری توصیف شده با معادلهٔ (م۴-۲۵-۱) و یک سیگنال نویز تداخل کنندهٔ $n(t)$ مدل کرد. چنین مدلی در شکل م۴-۵۲ (الف) نشان داده شده است که به آن، سیستم معکوس از قسمت (الف) را هم الحاق کرده‌ایم که در این شرایط، ورودی سیستم معکوس برابر خروجی کلی دستگاه اندازه گیری است. فرض کنید که $n(t) = \sin \omega t$ باشد. اثر $n(t)$ در خروجی سیستم معکوس چیست و وقتی که ω افزایش می‌یابد، این خروجی چگونه تغییر می‌کند؟

(پ) مسأله‌ای که در قسمت (ب) ظاهر شد، یک مسألهٔ مهم در بسیاری از کاربردهای تحلیل سیستم LTI است. ما مشخصاً با یک مصالحهٔ اساسی بین سرعت پاسخ سیستم و میزان توانایی سیستم در تضعیف تداخل فرکانس بالا مواجه هستیم. درقسمت (ب) دیدیم که این مصالحه ایجاب می‌کند که هر تلاشی برای سرعت بخشیدن به پاسخ دستگاه اندازه گیری (به وسیلهٔ سیستم معکوس) بـه ایـجاد سیستمی منجر می‌شود کـه سیگنال‌های سینوسی مخدوش کننده را هم تقویت می‌کند. برای بیشتر روشن ساختن این مفهوم، یک دستگاه اندازه گیری را درنظر بگیرید که به طور آنی به تغییرات دما پاسخ می‌دهد و در عین حال با نویز هم مخدوش می‌شود. پاسخ چنین سیستمی را، همان طور که در شکل م۴-۵۲ (ب) نشان داده شده است، می توان به صورت مجموع پاسخ یک دستگاه اندازه گیری دقیق و سیگنال مخدوش کنندهٔ $n(t)$ مدل کرد. فرض کنید که می‌خواهیم یک سیستم جبران کننده



(الف)



(ب)

طرح کنیم که پاسخ به تغییرات دمای واقعی را کُندتر کرده و همچنین نویز $n(t)$ را تضعیف کند. فرض کنید پاسخ ضربهٔ این سیستم به صورت زیر باشد:

$$h(t) = ae^{-at}u(t).$$

مقدار a را چنان انتخاب کنید که پاسخ سیستم کلی در شکل م۴-۵۲ (ب) به تغییر پله‌ای در دما، تحت این محدویت که دامنهٔ آن قسمت از خروجی که از نویز $n(t) = \sin 6t$ ناشی می‌شود بیشتر از ۱/۴ نشود، تا حد ممکن سریع گردد.

۴-۵۳ همان طور که در متن کتاب متذکر شدیم، روشهای تحلیل فوریه را می‌توان به سیگنال‌هایی که دو متغیر مستقل دارند، تعمیم داد. این روشها، همانند آن‌چه که همتاهای یک بُعدی آنها در برخی کاربردها انجام می‌دهند، نقش مهمی در کاربردهای دیگر، نظیر پردازش تصویر، ایفا می‌کنند. در این مسأله برخی از ایده‌های مقدماتی را در مورد تحلیل فوریهٔ دوبعدی معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $x(t_1, t_2)$ سیگنالی باشد که به دومتغیر مستقل t_1 و t_2 بستگی دارد. تبدیل فوریهٔ دوبُعدی $x(t_1, t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t_1, t_2)e^{-j(\omega_1 t_1+\omega_2 t_2)}dt_1\,dt_2\ .$$

(الف) نشان دهید که این انتگرال دوگانه را می‌توان به صورت دو تبدیل فوریهٔ یک بعدی متوالی انجام داد، ابتدا برحسب t_1 با ثابت درنظر گرفتن t_2، و سپس برحسب t_2.

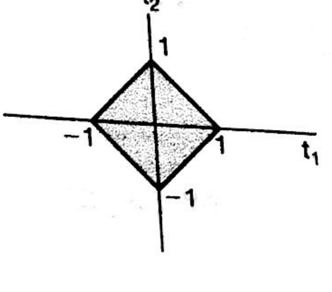
(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و عکس تبدیل را ــ یعنی عبارتی برای $x(t_1, t_2)$ برحسب $X(j\omega_1, j\omega_2)$ ــ تعیین کنید.

(پ) تبدیلهای فوریهٔ دوبعدی سیگنال‌های زیر را تعیین کنید:

(۱) $x(t_1, t_2) = e^{-t_1+2t_2}u(t_1 - 1)u(2 - t_2)$

(۲) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \text{اگر } -1 < t_1 \le 1 \text{ و } -1 \le t_2 \le 1 \\ 0, & \text{درغیراین‌صورت} \end{cases}$

(۳) $x(t_1, t_2) = \begin{cases} e^{-|t_1|-|t_2|}, & \text{اگر } 0 \le t_1 \le 1 \text{ یا } 0 \le t_2 \le 1 \text{ (یا هر دو)} \\ 0, & \text{درغیراین صورت} \end{cases}$



در ناحیهٔ سایه خورده $x(t_1, t_2) = 1$
و صفر در خارج آن

شکل م٤-۵۳

(۴) $x(t_1, t_2)$ به صورتی که در شکل م۴-۵۳ نشان داده شده است.

(۵) $e^{-|t_1+t_2|-|t_1-t_2|}$

(ت) سیگنال $x(t_1, t_2)$ راکه تبدیل فوریهٔ دوبعدی آن به صورت زیر است، تعیین کنید:

$$X(j\omega_1, j\omega_2) = \frac{2\pi}{4 + j\omega_1}\delta(\omega_2 - 2\omega_1).$$

(ث) فرض کنید $x(t_1, t_2)$ و $h(t_1, t_2)$ دو سیگنال به ترتیب با تبدیلهای فوریهٔ دوبعدی $X(j\omega_1, j\omega_2)$ و $H(j\omega_1, j\omega_2)$ باشند. تبدیلهای سیگنال‌های زیر را برحسب $X(j\omega_1, j\omega_2)$ و $H(j\omega_1, j\omega_2)$ تعیین کنید:

(۱) $x(t_1 - T_1, t_2 - T_2)$

(۲) $x(at_1, bt_2)$

(۳) $y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau_1, \tau_2)h(t_1 - \tau_1, t_2 - \tau_2)d\tau_1\, d\tau_2$