بخش نخست از مسائل به مباحث پایه‌ای تعلق دارد و جوابهای آنها در انتهای کتاب ارائه شده است.
سه بخش بعدی شامل مسائلی هستند که به ترتیب به مباحث پایه‌ای، پیشرفته، و تعمیمی تعلق دارند.

مسائل پایه‌ای با جواب

۳-۱ سیگنال متناوب زمان-پیوستهٔ $x(t)$ دارای مقدار حقیقی بوده و دورهٔ تناوب اصلی آن برابر $T = ۸$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریهٔ $x(t)$ عبارتند از:

$$a_1 = a_{-1} = 2\ ,\ \ a_3 = a_{-3}^* = 4j.$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

۳-۲ سیگنال زمان-گسستهٔ متناوب $x[n]$ دارای مقدار حقیقی بوده و دورهٔ تناوب اصلی آن $N = ۵$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریهٔ $x[n]$ عبارتنداز:

$$a_0 = 1,\ a_2 = a_{-2}^* = e^{j\pi/4},\ a_4 = a_{-4}^* = 2e^{j\pi/3}$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید:

$$x[n] = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k).$$

۳-۳ برای سیگنال متناوب زمان-پیوستهٔ زیر:

$$x(t) = 2 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right) + 4\sin\left(\frac{5\pi}{3}t\right),$$

فرکانس اصلی ω_0 و ضرایب سری فوریه a_k را چنان تعیین کنید که:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}.$$

۳-۴ از معادلهٔ تحلیل سری فوریه (۳-۳۹) استفاده کرده و ضرایب a_k را برای سیگنال متناوب زمان-پیوستهٔ زیر:

$$x(t) = \begin{cases} 1{,}5, & 0 \le t < 1 \\ -1{,}5, & 1 \le t < 2 \end{cases}$$

با فرکانس اصلی $\omega_0 = \pi$ محاسبه کنید.

۳-۵ فرض کنید $x_1(t)$ یک سیگنال متناوب زمان-پیوسته با فرکانس اصلی ω_1 و ضرایب فوریه a_k باشد.
با فرض این که:

$$x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$$

باشد، فرکانس اصلی ω_2 برای $x_2(t)$ چگونه به ω_1 مرتبط می‌شود؟ همچنین رابطه‌ای بین ضرایب سری فوریه b_k برای $x_2(t)$ و ضرایب a_k بیابید. می‌توانید از خواص درج شده در جدول ۳-۱ استفاده کنید.

۳-۶ سه سیگنال متناوب زمان-پیوسته را در نظر بگیرید که نمایشهای سری فوریهٔ آنها به شرح زیر است:

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k e^{jk\frac{2\pi}{50}t},$$

$$x_2(t) = \sum_{k=-100}^{100} \cos(k\pi) e^{jk\frac{2\pi}{50}t},$$

$$x_3(t) = \sum_{k=-100}^{100} j\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{jk\frac{2\pi}{50}t}.$$

برای کمک در جواب دادن به سؤالات زیر از خواص سری فوریه استفاده کنید:

(الف) کدام یک از این سه سیگنال حقیقی هستند؟

(ب) کدام یک از این سه سیگنال زوج هستند؟

۳-۷ فرض کنید سیگنال متناوب $x(t)$ دارای دورهٔ تناوب اصلی T و ضرایب فوریهٔ a_k باشد. در موارد گوناگونی، گاه ساده‌تر آن است که بجای محاسبهٔ a_k به طور مستقیم، ضرایب سری فوریه b_k را برای $g(t) = dx(t)/dt$ محاسبه کنیم. با فرض این که:

$$\int_T^{2T} x(t)dt = 2$$

باشد، عبارتی را برای a_k برحسب b_k و T بیابید. برای کمک به یافتن این عبارت، می‌توانید از هر کدام از خواص درج شده در جدول ۳-۱ استفاده کنید.

۳-۸ فرض کنید که اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱- $x(t)$ حقیقی و فرد است.

۲- $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب $T = 2$ بوده و دارای ضرایب فوریهٔ a_k است.

۳- برای $|k| > 1$ ، $a_k = 0$ است.

۴- $\frac{1}{2}\int_0^2 |x(t)|^2 dt = 1$.

دو سیگنال مختلف را که در این شرایط صدق می‌کنند، تعیین کنید.

۹-۳ از معادلهٔ تحلیل (۳-۹۵) استفاده کرده و مقادیر عددی یک دورهٔ تناوب ضرایب سری فوریهٔ سیگنال متناوب زیر را محاسبه کنید:

$$x[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\{4\delta[n-4m]+8\delta[n-1-4m]\}.$$

۱۰-۳ فرض کنید که $x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی و فرد با دورهٔ تناوب $N=7$ و ضرایب فوریهٔ a_k باشد. با فرض این که:

$$a_{15}=j,\ a_{16}=2j,\ a_{17}=3j,$$

باشند، مقادیر a_0، a_{-1}، a_{-2}، و a_{-3} را تعیین کنید.

۱۱-۳ فرض کنید که اطلاعات زیر در مورد سیگنال $x[n]$ داده شده است:

۱- $x[n]$ یک سیگنال حقیقی و زوج است.

۲- $x[n]$ دارای دورهٔ تناوب $N=10$ و ضرایب فوریهٔ a_k است.

۳- $a_{11}=5$.

۴- $\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{9}|x[n]|^2=50$.

نشان دهید که $x[n]=A\cos(Bn+C)$ می‌باشد و مقادیر ثابتهای A، B، و C را مشخص کنید.

۱۲-۳ هر یک از دو دنبالهٔ $x_1[n]$ و $x_2[n]$ دارای دورهٔ تناوب $N=4$ بوده و ضرایب سری فوریهٔ متناظر به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$x_1[n]\longleftrightarrow a_k,\qquad x_2[n]\longleftrightarrow b_k,$$

که در آن:

$$a_0=a_3=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_2=1 \quad \text{و} \quad b_0=b_1=b_2=b_3=1.$$

با استفاده از خاصیت ضرب دو سیگنال در جدول ۳-۱، ضرایب سری فوریه c_k را برای سیگنال $g[n]=x_1[n]x_2[n]$ تعیین کنید.

۱۳-۳ یک سیستم LTI زمان-پیوسته را درنظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است:

$$H(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{\sin(4\omega)}{\omega}.$$

اگر ورودی این سیستم سیگنال متناوب زیر:

$$x(t)=\begin{cases}1, & 0\le t<4\\ -1, & 4\le t<8\end{cases}$$

با دورهٔ تناوب $T=8$ باشد، خروجی متناظر $y(t)$ سیستم را تعیین کنید.

۱۴-۳ وقتی که قطار ضربهٔ زیر:

$$x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-4k]$$

ورودی یک سیستم LTI خاص با پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ است، خروجی سیستم به صورت زیر درمی‌آید:

$$y[n] = \cos\left(\frac{5\pi}{2}n + \frac{\pi}{4}\right).$$

مقادیر $H(e^{jk\pi/2})$ را به ازای $k = 0, 1, 2, 3$ تعیین کنید.

۳-۱۵ فیلتر پایین گذر ایده‌آل زمان-پیوستهٔ S را درنظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le 100 \\ 0, & |\omega| > 100 \end{cases}$$

وقتی که ورودی این فیلتر سیگنال $x(t)$ با دورهٔ تناوب اصلی $T = \frac{\pi}{6}$ و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد، چنین داریم:

$$x(t) \xrightarrow{S} y(t) = x(t).$$

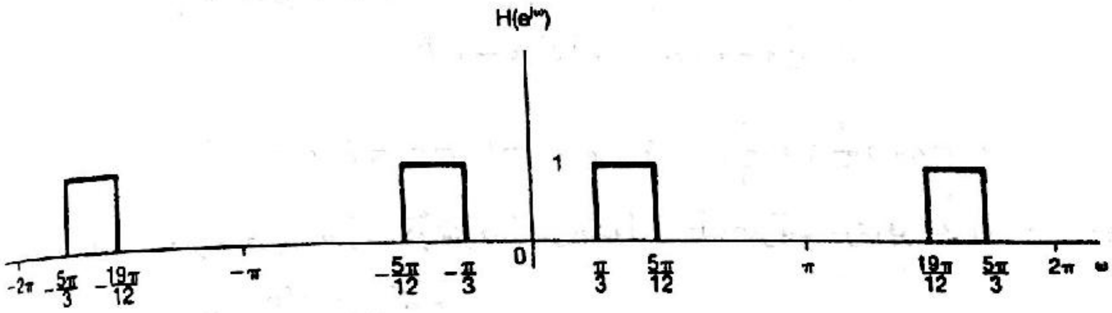
به ازای چه مقادیری از k، قطعاً $a_k = 0$ است؟

۳-۱۶ خروجی فیلتر نشان داده شده در شکل ۳-۱۶ را برای ورودیهای متناوب زیر تعیین کنید:

(الف) $x_1[n] = (-1)^n$

(ب) $x_2[n] = 1 + \sin\left(\frac{3\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$

(پ) $x_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-4k} u[n-4k]$



شکل م۳-۱۶

۳-۱۷ سه سیستم زمان-پیوستهٔ S_1، S_2، و S_3 را درنظر بگیرید که پاسخهای آنها به ورودی نمایی مختلط e^{j5t} به صورت زیر مشخص شده است:

$$S_1 : e^{j5t} \longrightarrow te^{j5t},$$

$$S_2 : e^{j5t} \longrightarrow e^{j5(t-1)},$$

$$S_3 : e^{j5t} \longrightarrow \cos(5t).$$

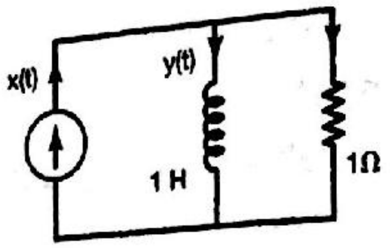
برای هر سیستم تعیین کنید که آیا اطلاعات داده شده، برای این نتیجه گیری که سیستم قطعاً LTI نیست، کفایت می‌کند؟

۳-۱۸ سه سیستم زمان-گسستهٔ S_1، S_2، و S_3 را در نظر بگیرید که پاسخهای آنها به ورودی نمایی مختلط $e^{j\pi/2n}$ به ترتیب به صورت زیر مشخص شده است:

$$S_۱: e^{j\pi n/۲} \longrightarrow e^{j\pi n/۲}u[n],$$
$$S_۲: e^{j\pi n/۲} \longrightarrow e^{j۳\pi n/۲},$$
$$S_۳: e^{j\pi n/۲} \longrightarrow ۲e^{j۵\pi n/۲}.$$

برای هر سیستم تعیین کنید که آیا اطلاعات داده شده، برای این نتیجه‌گیری که سیستم قطعاً LTI نیست، کفایت می‌کند؟

۳-۱۹ یک سیستم LTI علّی را درنظر بگیرید که به صورت مدار RL نشان داده شده در شکل م۳-۱۹ پیاده سازی شده است. منبع جریانی، جریان ورودی $x(t)$ را تأمین می‌کند و فرض می‌شود که خروجی سیستم برابر جریان $y(t)$ گذرنده از سلف باشد.



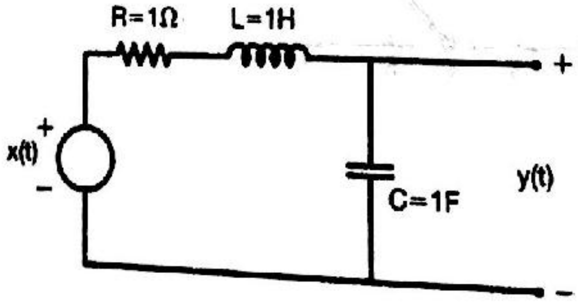
شکل م۳-۱۹

(الف) معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می‌سازد.

(ب) با درنظر گرفتن خروجی سیستم به ورودیهایی به صورت $x(t) = e^{j\omega t}$، پاسخ فرکانسی این سیستم را تعیین کنید.

(پ) اگر $x(t) = \cos(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

۳-۲۰ یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که به صورت مدار RLC نشان داده شده در شکل م۳-۲۰ پیاده سازی شده است. در این مدار $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ دوسر خازن به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود.



شکل م۳-۲۰

(الف) معادلهٔ دیفرانسیلی را بیابید که $x(t)$ و $y(t)$ را به هم مرتبط می‌سازد.

(ب) با درنظر گرفتن خروجی سیستم به ورودیهای به صورت $x(t) = e^{j\omega t}$، پاسخ فرکانسی این سیستم را تعیین کنید.

(پ) اگر $x(t) = \sin(t)$ باشد، خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

مسائل پایه‌ای

۲۱-۳ سیگنال متناوب زمان- پیوستهٔ $x(t)$ دارای مقدار حقیقی بوده و دورهٔ تناوب اصلی آن $T=8$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریهٔ $x(t)$ به صورت زیر مشخص شده‌اند:

$$a_1 = a_{-1}^* = j\ ,\ a_5 = a_{-5} = 2$$

$x(t)$ را به صورت زیر بیان کنید:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(\omega_k t + \phi_k).$$

۲۲-۳ نمایش سری فوریهٔ سیگنال‌های زیر را تعیین کنید:

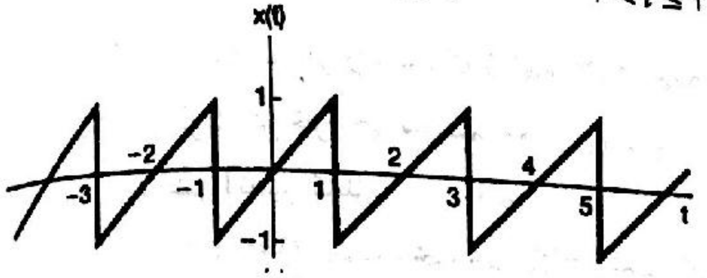
(الف) $x(t)$ های داده شده در شکل م۳-۲۲ (الف) تا (ج).

(ب) $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب ۲ و :

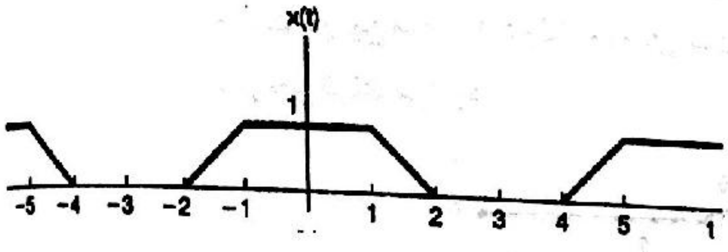
$$x(t) = e^{-t}\ ,\quad -1 < t < 1 \quad \text{برای}$$

(پ) $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب ۴ و :

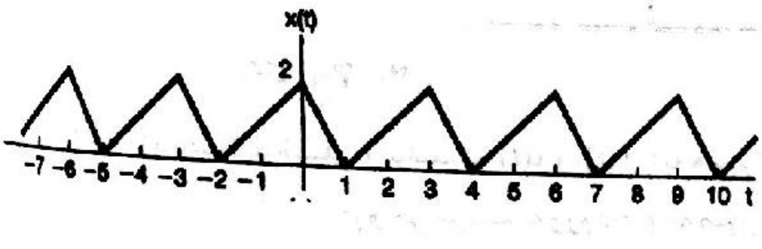
$$x(t) = \begin{cases} \sin \pi t, & 0 \le t \le 2 \\ 0, & 2 < t \le 4 \end{cases}$$



(الف)

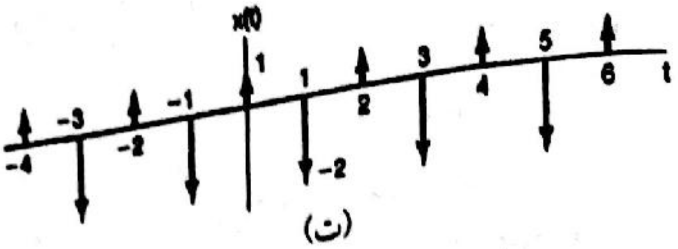


(ب)

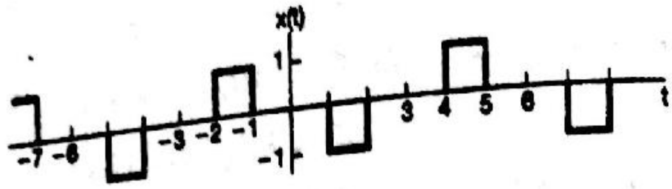


(پ)

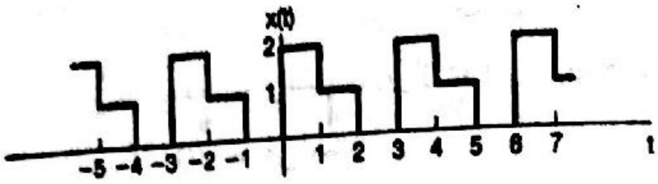
شکل م۳-۲۲



(ت)



(ث)



(ج)

ادامهٔ شکل م۳-۲۲

۳-۲۳ در هر یک از موارد زیر، ضرایب سری فوریهٔ یک سیگنال زمان-پیوسته که با دورهٔ تناوب ۴ متناوب می‌باشد، مشخص شده است. در هر مورد، سیگنال $x(t)$ را تعیین کنید.

(الف) $a_k = \begin{cases} 0, & k=0 \\ (j)^k \dfrac{\sin k\pi/4}{k\pi}, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$ (ب) $a_k = (-1)^k \dfrac{\sin k\pi/8}{2k\pi}$

(پ) $a_k = \begin{cases} jk, & |k|<3 \\ 0, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$ (ت) $a_k = \begin{cases} 1, & k \text{ زوج} \\ 2, & k \text{ فرد} \end{cases}$

۳-۲۴ فرض کنید که:

$$x(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t < 1 \\ 2-t, & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $T=2$ و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد.

(الف) مقدار a_0 را تعیین کنید.

(ب) نمایش سری فوریهٔ $dx(t)/dt$ را تعیین کنید.

(پ) از نتیجهٔ قسمت (ب) و خاصیت مشتق‌گیری سری فوریهٔ زمان-پیوسته کمک گرفته و ضرایب سری فوریهٔ $x(t)$ را تعیین کنید.

۳-۲۵ سه سیگنال زمان-پیوستهٔ زیر با دورهٔ تناوب اصلی $T = \frac{۱}{۲}$ را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \cos(۴\pi t), \qquad y(t) = \sin(۴\pi t), \qquad z(t) = x(t)y(t).$$

(الف) ضرایب سری فوریهٔ $x(t)$ را تعیین کنید.
ضرایب سری فوریهٔ $y(t)$ را تعیین کنید.

(ب) ضرایب سری فوریهٔ $z(t)=x(t)y(t)$ ، از نتایج قسمتهای (الف) و (ب) همراه با

(پ) برای تعیین ضرایب سری فوریهٔ زمان-پیوسته استفاده کنید.
خاصیت ضرب دوسیگنال سری فوریهٔ زمان-پیوسته استفاده کنید.

(ت) با بسط مستقیم $z(t)$ ، به شکل مثلثاتی، ضرایب سری فوریهٔ $z(t)$ را تعیین و نتیجهٔ خود را با نتیجهٔ قسمت (پ) مقایسه کنید.

۳-۲۶ فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب باشد که ضرایب سری فوریهٔ آن به صورت زیر است:

$$a_k = \begin{cases} ۲, & k = ۰ \\ j(\frac{۱}{۲})^{|k|}, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

برای جواب دادن به پرسشهای زیر از خواص سری فوریه استفاده کنید:

(الف) آیا $x(t)$ حقیقی است؟

(ب) آیا $x(t)$ زوج است؟

(پ) آیا $dx(t)/dt$ زوج است ؟

۳-۲۷ سیگنال متناوب زمان-گسستهٔ $x[n]$ دارای مقدار حقیقی بوده و دورهٔ تناوب اصلی آن $N = ۵$ است. ضرایب غیرصفر سری فوریهٔ $x[n]$ عبارتند از:

$$a_۰ = ۲, \quad a_۲ = a_{-۲}^* = ۲e^{j\pi/۶}, \quad a_۴ = a_{-۴}^* = e^{j\frac{\pi}{۳}}.$$

$x[n]$ را به صورت زیر بیان کنید:

$$x[n] = A_۰ + \sum_{k=۱}^{\infty} A_k \sin(\omega_k n + \phi_k).$$

۳-۲۸ برای هر یک از سیگنال‌های متناوب زمان-گسستهٔ زیر، ضرایب سری فوریه را تعیین کنید. اندازه و فاز هر مجموعه از ضرایب a_k را ترسیم نمایید.

(الف) $x[n]$های داده شده در شکل م۳-۲۸ (الف) تا (پ).

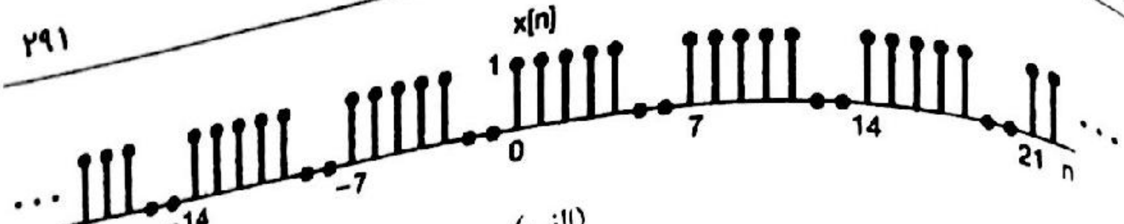
(ب) $x[n] = \sin(۲\pi n/۳)\cos(\pi n/۲)$

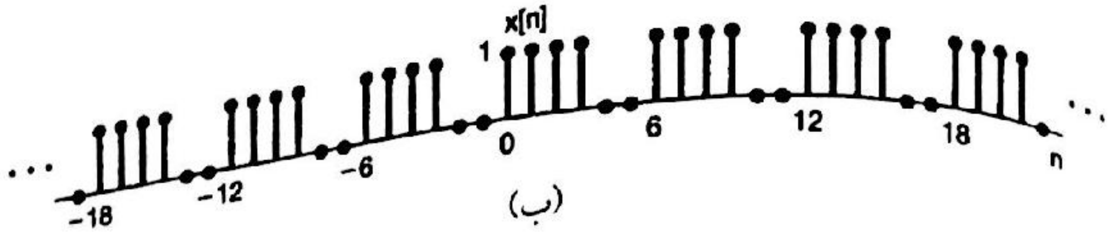
(پ) $x[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب ۴ و :

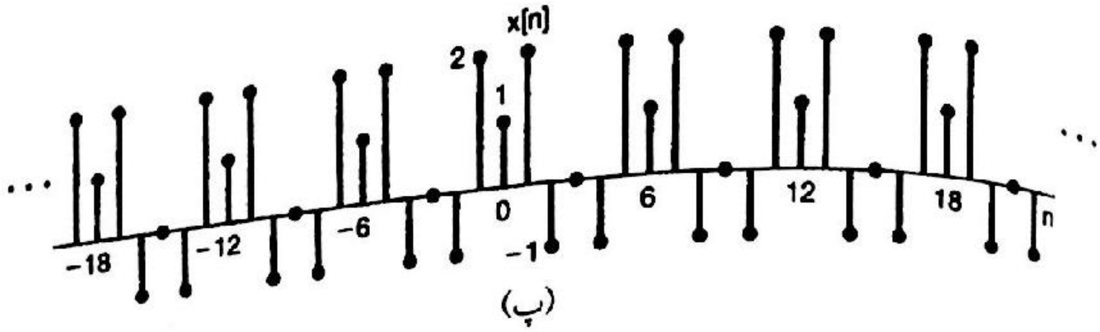
$$x[n] = ۱ - \sin\frac{\pi n}{۴}, \quad ۰ \le n \le ۳ \text{ برای}$$

(ت) $x[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب ۱۲ و :

$$x[n] = ۱ - \sin\frac{\pi n}{۴}, \quad ۰ \le n \le ۱۱ \text{ برای}$$







شکل م۳-۲۸

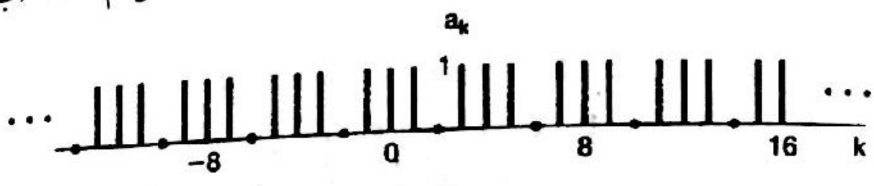
۳-۲۹ در هر یک از موارد زیر، ضرایب سری فوریهٔ یک سیگنال زمان‌ـگسسته که با دورهٔ تناوب ۸ متناوب می‌باشد، مشخص شده است. در هر مورد سیگنال $x[n]$ را تعیین کنید.

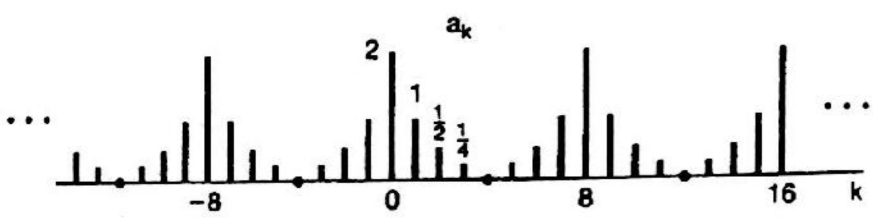
(الف) $a_k = \cos\left(\frac{k\pi}{۴}\right) + \sin\left(\frac{۳k\pi}{۴}\right)$

(ب) $a_k = \begin{cases} \sin\left(\frac{k\pi}{۳}\right), & ۰ \le k \le ۶ \\ ۰, & k = ۷ \end{cases}$

(پ) a_k به صورت شکل م۳-۲۹ (الف)

(ت) a_k به صورت شکل م۳-۲۹ (ب)





شکل م۳-۲۹

۳-۳۰ سه سیگنال زمان-گسستهٔ زیر با دورهٔ تناوب اصلی $N = ۶$ را درنظر بگیرید:

$$x[n] = ۱ + \cos\left(\frac{۲\pi}{۶}n\right), \qquad y[n] = \sin\left(\frac{۲\pi}{۶}n + \frac{\pi}{۴}\right), \qquad z[n] = x[n]y[n].$$

(الف) ضرایب سری فوریهٔ $x[n]$ را تعیین کنید.

(ب) ضرایب سری فوریهٔ $y[n]$ را تعیین کنید.

(پ) برای تعیین ضرایب سری فوریهٔ $z[n] = x[n]y[n]$، از نتایج قسمتهای (الف) و (ب) همراه با خاصیت ضرب دوسیگنال سری فوریهٔ زمان-گسستهٔ استفاده کنید.

(ت) ضرایب سری فوریهٔ $z[n]$ را از طریق محاسبهٔ مستقیم تعیین و نتیجهٔ خود را با نتیجهٔ قسمت (پ) مقایسه کنید.

۳-۳۱ فرض کنید که:

$$x[n] = \begin{cases} ۱, & ۰ \le n \le ۷ \\ ۰, & ۸ \le n \le ۹ \end{cases}$$

یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب اصلی $N = ۱۰$ و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد. همچنین گیریم که:

$$g[n] = x[n] - x[n-۱].$$

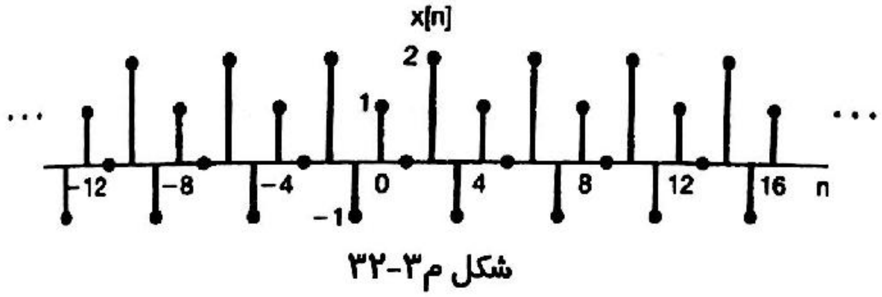
(الف) نشان دهید که $g[n]$ دارای دورهٔ تناوب اصلی ۱۰ است.

(ب) ضرایب سری فوریهٔ $g[n]$ را تعیین کنید.

(پ) با استفاده از ضرایب سری فوریهٔ $g[n]$ و خاصیت تفاضل اول در جدول ۳-۲، a_k را برای $k \neq ۰$ تعیین کنید.

۳-۳۲ سگینال $x[n]$ نشان داده شده در شکل م۳-۳۲ را درنظر بگیرید. این سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب $N = ۴$ است. سیگنال را می‌توان به صورت زیر برحسب یک سری فوریهٔ زمان-گسسته بیان کرد:

$$x[n] = \sum_{k=۰}^{۳} a_k e^{jk(۲\pi/۴)n}. \qquad (م۳-۳۲-۱)$$



شکل م۳-۳۲

همان‌طور که در متن کتاب متذکر شدیم، یک روش تعیین ضرایب سری فوریه آن است که معادلهٔ (م۳-۳۲-۱) را به صورت مجموعه‌ای از چهار معادلهٔ خطی (برای $n = ۰, ۱, ۲, ۳$) با چهار مجهول ($a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، و $a_۳$) درنظر بگیریم.

(الف) این چهار معادله را به طور صریح بنویسید و آنها را با استفاده از هر روش استاندارد حل

چهار معادله با چهار مجهول، مستقیماً حل کنید. (ابتدا مطمئن شوید که نمایی‌های مختلط پیش گفته را به ساده‌ترین شکل در آورده‌اید.)

(ب) با محاسبهٔ مستقیم a_k از طریق معادلهٔ تحلیل سری فوریهٔ زمان-گسسته، درستی جواب خود را امتحان کنید:

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk(2\pi/4)n}.$$

۳-۳۳ یک سیستم LTI زمان-پیوستهٔ علّی را درنظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادلهٔ دیفرانسیل زیربه هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t).$$

برای هر یک از ورودیهای زیر، نمایش سری‌فوریهٔ خروجی $y(t)$ را بیابید:

(الف) $x(t) = \cos 2\pi t$

(ب) $x(t) = \sin 4\pi t + \cos(6\pi t + \frac{\pi}{4})$

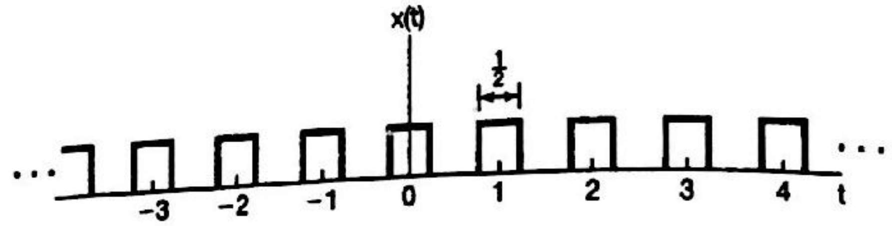
۳-۳۴ یک سیستم LTI زمان-پیوسته با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h(t) = e^{-4|t|}$$

برای هر یک از ورودیهای زیر، نمایش سری‌فوریهٔ خروجی $y(t)$ را بیابید:

(الف) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-n)$ (ب) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(t-n)$

(پ) $x(t)$ موج متناوب نشان داده شده در شکل م۳-۳۴ است.



شکل م۳-۳٤

۳-۳۵ سیستم LTI زمان-پیوستهٔ S را درنظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \geq 250 \\ 0, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

وقتی که ورودی این سیستم برابر سیگنال $x(t)$ با دورهٔ تناوب اصلی $T = \frac{\pi}{7}$ و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد، چنین نتیجه می‌شود که خروجی $y(t)$ برابر $x(t)$ است. به ازای چه مقادیری از k قطعاً $a_k = 0$ است؟

۳-۳۶ یک سیستم LTI زمان-گسستهٔ علّی را درنظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادلهٔ تفاضلی زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n].$$

برای هر یک از ورودیهای زیر، نمایش سری فوریهٔ خروجی $y[n]$ را بیابید:

(الف) $x[n] = \sin(\frac{3\pi}{4}n)$ (ب) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{4}n) + 2\cos(\frac{\pi}{2}n)$

۳-۳۷ یک سیستم LTI زمان-گسسته با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}.$$

برای هر یک از ورودیهای زیر، نمایش سری فوریهٔ خروجی $y[n]$ را بیابید:

(الف) $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$

(ب) $x[n]$ متناوب با دورهٔ تناوب ۶ بوده و: $x[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, \pm 1 \\ 0, & n = \pm 2, \pm 3 \end{cases}$

۳-۳۸ یک سیستم LTI زمان-گسسته با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 2 \\ -1, & -2 \le n \le -1. \\ 0, & \text{در غیراین‌صورت} \end{cases}$$

با فرض این که ورودی این سیستم به صورت زیر باشد:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n-4k],$$

ضرایب سری فوریهٔ خروجی $y[n]$ را تعیین کنید.

۳-۳۹ سیستم LTI زمان-گسستهٔ S را درنظر بگیرید که پاسخ فرکانسی آن به صورت زیر است:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \frac{\pi}{8} \\ 0, & \frac{\pi}{8} < |\omega| < \pi \end{cases}.$$

نشان دهید که اگر ورودی $x[n]$ به این سیستم دارای دورهٔ تناوب $N = 3$ باشد، خروجی $y[n]$ فقط یک ضریب سری فوریهٔ غیرصفر در هر دورهٔ تناوب دارد.

مسائل پیشرفته

۳-۴۰ فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب اصلی T و ضرایب سری‌فوریهٔ a_k باشد. ضرایب سری فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های زیر را برحسب a_k به دست آورید:

(الف) $x(t-t_0) + x(t+t_0)$ (ب) $\mathcal{E}v\{x(t)\}$ (پ) $\mathcal{R}e\{x(t)\}$

(ت) $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$ (ث) $x(3t-1)$ [دراین قسمت ابتدا دورهٔ تناوب $x(3t-1)$ را تعیین کنید.]

۳-۴۱ فرض کنید که اطلاعات زیر در مورد یک سیگنال متناوب زمان-پیوسته با دورهٔ تناوب ۳ و ضرایب فوریهٔ a_k داده شده است:

۱- $a_k = a_{k+2}$

۲- $a_k = a_{-k}$

۳- $\int_{-0.5}^{0.5} x(t)dt = 1$

۴- $\int_{0.5}^{1.5} x(t)dt = 2$

$x(t)$ را تعیین کنید.

۳-۴۲ فرض کنید $x(t)$ یک سیگنال با مقدار حقیقی و با دوره تناوب اصلی T و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد.

(الف) نشان دهید که $a_k = a_{-k}^*$ بوده و a_0 باید حقیقی باشد.

(ب) نشان دهید که اگر $x(t)$ زوج باشد، آنگاه ضرایب سری فوریهٔ آن باید حقیقی و زوج باشند.

(پ) نشان دهید که اگر $x(t)$ فرد باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن باید موهومی و فرد بوده و $a_0 = 0$ باشد.

(ت) نشان دهید که ضرایب فوریهٔ جزء زوج $x(t)$ برابر $\mathcal{R}e\{a_k\}$ است.

(ث) نشان دهید که ضرایب فوریهٔ جزء فرد $x(t)$ برابر $j\mathcal{I}m\{a_k\}$ است.

۳-۴۳ (الف) سیگنال متناوب زمان-پیوسته $x(t)$ با دوره تناوب T را هارمونیک فرد گویند اگر در نمایش سری فوریهٔ آن

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t}, \qquad \text{(م۳-۴۳-۱)}$$

برای هر عدد صحیح زوج غیرصفر k، $a_k = 0$ باشد.

(۱) نشان دهید که اگر $x(t)$ هارمونیک فرد باشد، آنگاه

$$x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right). \qquad \text{(م۳-۴۳-۲)}$$

(۲) نشان دهید که اگر $x(t)$ در معادلهٔ (م۳-۴۳-۲) صدق کند، آنگاه هارمونیک فرد است.

(ب) فرض کنید $x(t)$ سیگنال متناوب هارمونیک-فرد با دورهٔ تناوب ۲ باشد به طوری که:

$$x(t) = t \qquad , \qquad \text{برای } 0 < t < 1$$

$x(t)$ را رسم کنید و ضرایب سری فوریهٔ آن را بیابید.

(پ) مشابه یک سیگنال هارمونیک-فرد می‌توان سیگنال هارمونیک-زوج را به صورت سیگنالی که برای آن در نمایش معادلهٔ (م۳-۴۳-۱) برای k فرد، $a_k = 0$ است، تعریف کرد. آیا T می‌تواند دورهٔ تناوب اصلی چنین سیگنالی باشد؟ جواب خود را توضیح دهید.

(ت) به طور کلی‌تر، نشان دهید که اگر یکی از دو مورد زیر برقرار باشد T دوره تناوب اصلی $x(t)$ در معادله (م۳-۴۳-۱) است.

(۱) a_1 یا a_{-1} غیرصفر باشند.

یا

(۲) دو عدد صحیح k و l که هیچ عامل مشترکی ندارند وجود داشته باشد به طوری که هر دوی a_k و a_l غیرصفر باشند.

۳-۴۴ فرض کنید اطلاعات زیر در باره سیگنال $x(t)$ داده شده است:

۱- $x(t)$ یک سیگنال حقیقی است.

۲- $x(t)$ متناوب با دوره تناوب $T=6$ است و دارای ضرایب فوریهٔ a_k می‌باشد.

۳- برای $k=0$ و $k>2$، $a_k=0$ است.

۴- $x(t)=-x(t-3)$.

۵- $\frac{1}{6}\int_{-3}^{3}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2}$

۶- a_1 عددی حقیقی و مثبت است.

نشان دهید که $x(t)=A\cos(Bt+C)$، و مقادیر ثابتهای A، B و C را تعیین کنید.

۴۵-۳ فرض کنید که $x(t)$ یک سیگنال متناوب حقیقی با نمایش سری فوریهٔ داده شده به صورت سینوسی-کسینوسی در معادلهٔ (۳-۳۲) باشد؛ یعنی:

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}[B_k\cos k\omega_0t-C_k\sin k\omega_0t]. \qquad (\text{م۳-۴۵-۱})$$

(الف) نمایش سری فوریهٔ نمایی را برای جزء‌های زوج و فرد $x(t)$ بیابید؛ یعنی ضرایب α_k و β_k را برحسب ضرایب معادلهٔ (م۳-۴۵-۱) چنان بیابید که:

$$\mathcal{E}v\{x(t)\}=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_ke^{jk\omega_0t},$$

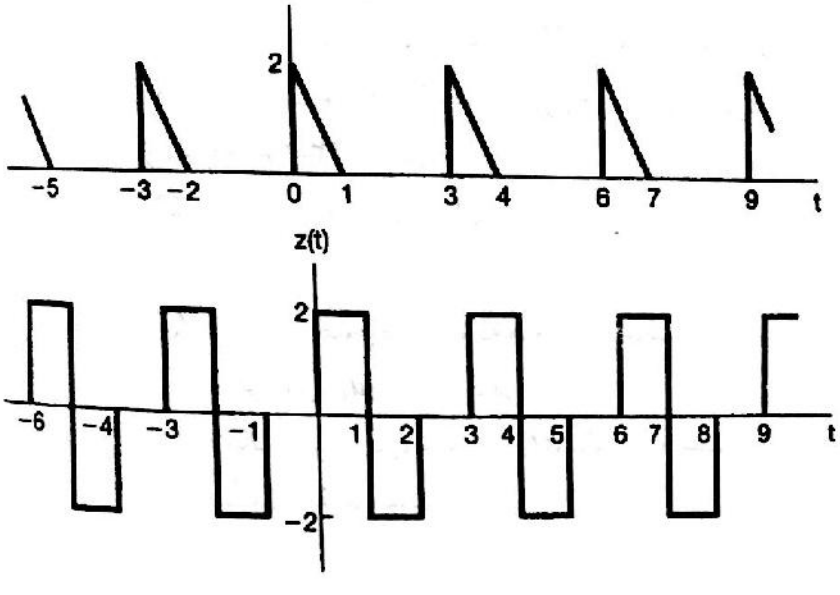
$$\mathcal{O}d\{x(t)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\beta_ke^{jk\omega_0t}.$$

(ب) در قسمت (الف) رابطهٔ بین α_k و α_{-k} چیست؟ رابطهٔ بین β_k و β_{-k} چیست؟

(پ) فرض کنید که سیگنال‌های $x(t)$ و $z(t)$ نشان داده شده در شکل م۳-۴۵ دارای نمایشهای سری سینوسی-کسینوسی زیر باشند:

$$x(t)=a_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)-C_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right],$$

$$z(t)=d_0+2\sum_{k=1}^{\infty}\left[E_k\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)-F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right].$$



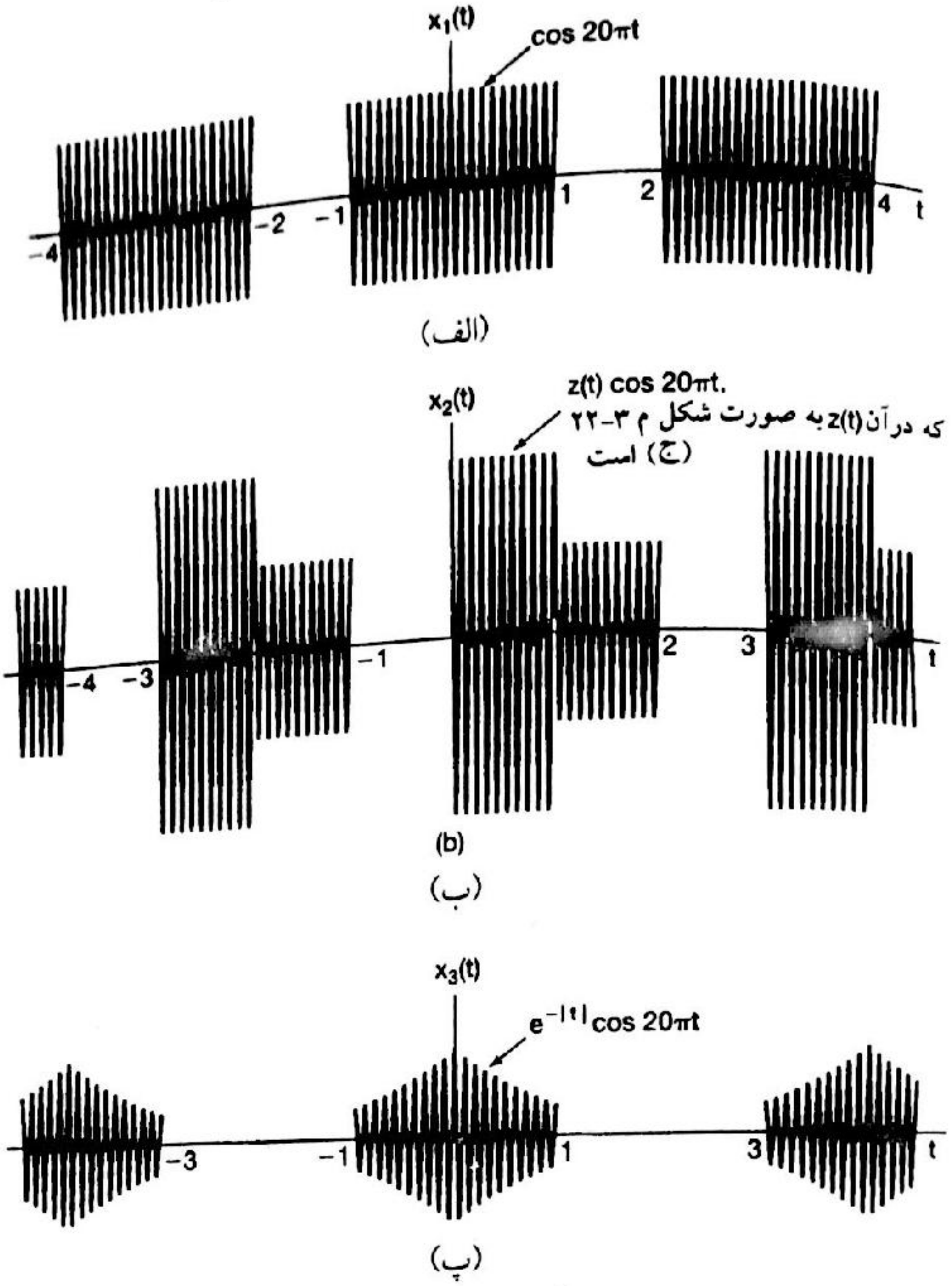
شکل م۳-۴۵

سیگنال زیر را رسم کنید:

$$y(t) = 2(a_0+d_0)+2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[B_k+\frac{1}{2}E_k\right]\cos\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)+F_k\sin\left(\frac{2\pi kt}{3}\right)\right\}.$$

۴۶-۳ در این مسأله دو خاصیت مهم سری فوریهٔ زمان-پیوسته را به دست می‌آوریم: خاصیت ضرب دو سیگنال و رابطهٔ پارسوال. فرض کنید که $x(t)$ و $y(t)$ هر دو سیگنال‌های متناوب زمان-پیوسته‌ای باشند که دارای دورهٔ تناوب T_0 بوده و نمایشهای سری فوریهٔ آنها به صورت زیر داده شده است:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}\quad,\quad y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}b_k e^{jk\omega_0 t}. \qquad (م۳-۴۶-۱)$$



شکل م۳-۴۶

سیگنال

(الف) نشان دهید که ضرایب سری فوریهٔ

$$z(t) = x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_\circ t}$$

با کانولوشن گسستهٔ زیر داده می‌شود:

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_k b_{k-n}.$$

$$c_k = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n b_{k-n}$$

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و ضرایب سری فوریهٔ سیگنال‌های $x_1(t)$، $x_2(t)$، و $x_3(t)$ را که در شکل م۳-۴۶ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

(پ) فرض کنید که $y(t)$ در معادلهٔ (م۳-۴۶-۱) مساوی $x^*(t)$ باشد. b_k را در این معادله برحسب a_k بیان کنید؛ از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و رابطهٔ پارسوال را برای سیگنال‌های متناوب ثابت کنید — یعنی:

$$\frac{1}{T_\circ}\int_\circ^{T_\circ} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2.$$

۴۷-۳ سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x(t) = \cos 2\pi t.$$

چون $x(t)$ با دورهٔ تناوب اصلی ۱ متناوب است، با دورهٔ تناوب N نیز، که N هر عدد صحیح مثبتی است، متناوب می‌باشد. اگر $x(t)$ را به صورت یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب ۳ در نظر بگیریم، ضرایب سری فوریهٔ آن برابر چیست؟

۴۸-۳ فرض کنید که $x[n]$ یک دنبالهٔ متناوب با دورهٔ تناوب N و نمایش سری فوریهٔ زیر باشد:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}. \qquad (م۳-۴۸-۱)$$

ضرایب سری فوریهٔ هر یک از سیگنال‌های زیر را می‌توان برحسب a_k در معادلهٔ (م۳-۴۸-۱) بیان کرد. این عبارتها را به دست آورید.

(الف) $x[n-n_\circ]$

(ب) $x[n]-x[n-1]$

(پ) $x[n]-x[n-\frac{N}{2}]$ (فرض کنید که N زوج است)

(ت) $x[n]+x[n+\frac{N}{2}]$ (فرض کنید که N زوج است؛ توجه کنید که این سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب $N/2$ است)

(ث) $x^*[-n]$

(ج) $(-1)^n x[n]$ (فرض کنید که N زوج است)

(چ) $(-1)^n x[n]$ (فرض کنید که N فرد است؛ توجه کنید که این سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب $2N$ است)

(ح) $$y[n] = \begin{cases} x[n], & n\ \text{زوج} \\ 0, & n\ \text{فرد} \end{cases}$$

۳-۴۹ فرض کنید که $x[n]$ یک دنبالهٔ متناوب با دورهٔ تناوب N و نمایش سریِ فوریهٔ زیر باشد:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad (۱-۴۹-۳م)$$

(الف) فرض کنید که N زوج بوده و $x[n]$ در معادلهٔ (م۳-۴۹-۱) در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{2}\right] \quad , \quad \text{برای تمام } n \text{ها}$$

نشان دهید که برای تمام اعداد صحیح زوج k، $a_k = 0$ است.

(ب) فرض کنید که N بر ۴ بخش‌پذیر است. نشان دهید که اگر:

$$x[n] = -x\left[n + \frac{N}{4}\right] \quad , \quad \text{برای تمام } n \text{ها}$$

باشد، آنگاه برای هر مقدار k که مضربی از ۴ باشد، $a_k = 0$ است.

(پ) در حالت کلی‌تر فرض کنید که N بر یک عدد صحیح M بخش‌پذیر باشد. نشان دهید که اگر:

$$\sum_{r=0}^{(N/M)-1} x\left[n + r\frac{N}{M}\right] = 0 \quad , \quad \text{برای تمام } n \text{ها}$$

باشد، آنگاه برای هر مقدار k که مضربی از M باشد، $a_k = 0$ است.

۳-۵۰ فرض کنید که اطلاعات زیر در مورد سیگنال متناوب $x[n]$ با دورهٔ تناوب ۸ و ضرایب فوریهٔ a_k داده شده است:

۱- $a_k = -a_{k-4}$.

۲- $x[2n+1] = (-1)^n$.

یک دورهٔ تناوب $x[n]$ را رسم کنید.

۳-۵۱ فرض کنید که $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب $N = 8$ و ضرایب سری فوریهٔ $a_k = -a_{k-4}$ باشد. سیگنال

$$y[n] = \left(\frac{1 + (-1)^n}{2}\right)x[n-1]$$

با دورهٔ تناوب $N = 8$ ساخته می‌شود. اگر ضرایب سری فوریهٔ $y[n]$ را با b_k نشان دهیم، تابع $f[k]$ را چنان بیابید که:

$$b_k = f[k]a_k.$$

۳-۵۲ $x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی با دورهٔ تناوب N و ضرایب سری فوریهٔ مختلط a_k است. فرض کنید که شکل کارتزین a_k را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$a_k = b_k + jc_k,$$

که در آن b_k و c_k هر دو حقیقی هستند.

(الف) نشان دهید که $a_{-k} = a_k^*$ است. رابطهٔ بین b_k و b_{-k} چیست؟ رابطهٔ بین c_k و c_{-k} چیست؟

(ب) فرض کنید که N زوج است. نشان دهید که $a_{N/2}$ حقیقی است.

(پ) نشان دهید که $x[n]$ را می‌توان به صورت یک سری فوریهٔ مثلثاتی نیز بیان کرد به طوری که اگر N فرد باشد،

$$x[n] = a_{\circ} + ۲ \sum_{k=۱}^{(N-۱)/۲} b_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{۲\pi kn}{N}\right),$$

و اگر N زوج باشد،

$$x[n] = (a_{\circ} + a_{N/۲}(-۱)^n) + ۲ \sum_{k=۱}^{(N-۲)/۲} b_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{N}\right) - c_k \sin\left(\frac{۲\pi kn}{N}\right).$$

(ت) نشان دهید که اگر شکل قطبی a_k به صورت $A_k e^{j\theta_k}$ باشد، آنگاه همچنین می‌توان نمایش سری فوریهٔ $x[n]$ را اگر N فرد باشد به صورت

$$x[n] = a_{\circ} + ۲ \sum_{k=۱}^{(N-۱)/۲} A_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{N} + \theta_k\right),$$

و اگر N زوج باشد، به صورت

$$x[n] = (a_{\circ} + a_{N/۲}(-۱)^n) + ۲ \sum_{k=۱}^{(N/۲)-۱} A_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{N} + \theta_k\right)$$

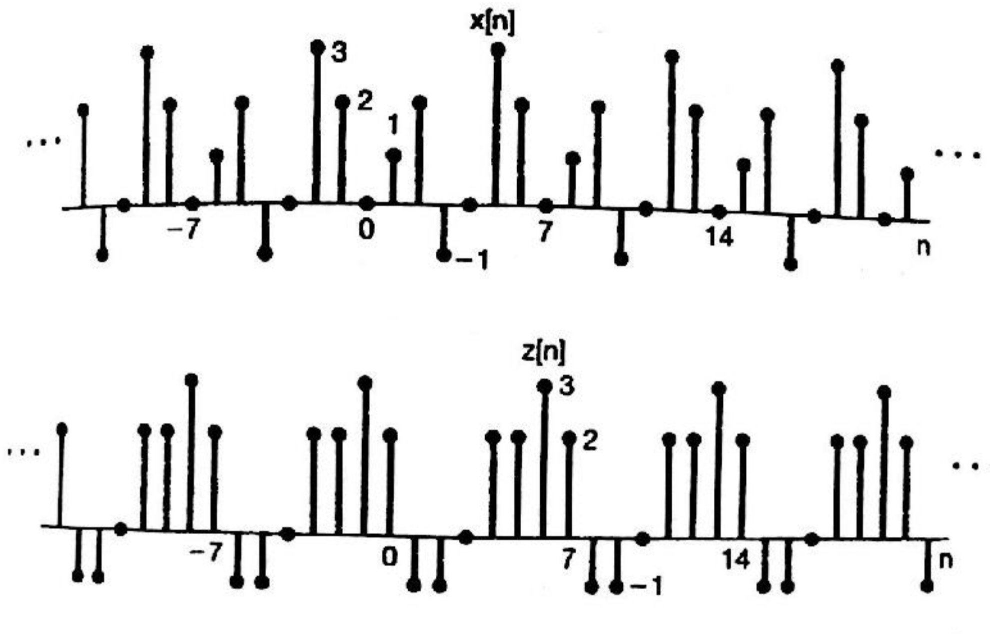
نوشت.

(ث) فرض کنید که $x[n]$ و $z[n]$ که در شکل م۳-۵۲ ترسیم شده‌اند، دارای نمایشهای سری سینوسی-کسینوسی زیر باشند:

$$x[n] = a_{\circ} + ۲ \sum_{k=۱}^{۳} \left\{ b_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{۷}\right) - c_k \sin\left(\frac{۲\pi kn}{۷}\right) \right\},$$

$$z[n] = d_{\circ} + ۲ \sum_{k=۱}^{۳} \left\{ d_k \cos\left(\frac{۲\pi kn}{۷}\right) - f_k \sin\left(\frac{۲\pi kn}{۷}\right) \right\}.$$

سیگنال زیر را رسم کنید:



شکل م۳-۵۲

$$y[n] = a_\circ - d_\circ + 2\sum_{k=1}^{3}\left\{d_k \cos\left(\frac{2\pi k n}{7}\right) + (f_k - c_k)\sin\left(\frac{2\pi k n}{7}\right)\right\}.$$

۳-۵۳ گیریم که $x[n]$ یک سیگنال متناوب حقیقی با دورهٔ تناوب N و ضرایب فوریهٔ a_k باشد.

(الف) نشان دهید که اگر N زوج باشد، حداقل دوتا از ضرایب فوریه در طول یک دورهٔ تناوب a_k حقیقی هستند.

(ب) نشان دهید که اگر N فرد باشد، حداقل یکی از ضرایب فوریه در طول یک دورهٔ تناوب a_k حقیقی است.

۳-۵۴ تابع زیر را درنظر بگیرید:

$$a[k] = \sum_{n=\circ}^{N-1} e^{j(2\pi/N)kn}.$$

(الف) نشان دهید که به ازای $k = \circ, \pm N, \pm 2N, \pm 3N, \dots$ ، $a[k] = N$ است.

(ب) نشان دهید که هرگاه k مضرب صحیحی از Nنباشد، $a[k] = \circ$است. (راهنمایی: از فرمول مجموع پایاندار استفاده کنید.)

(پ) اگر:

$$a[k] = \sum_{n=\langle N\rangle} e^{j(2\pi/N)kn}.$$

باشد، قسمتهای (الف) و (ب) را تکرار کنید.

۳-۵۵ گیریم که $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب اصلی N و ضرایب سری فوریهٔ a_k باشد. در این مسأله خاصیت تغییر مقیاس زمانی را که در جدول ۳-۲ درج شده است، به دست می‌آوریم:

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{m}], & n = \circ, \pm m, \pm 2m, \dots \\ \circ, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

(الف) نشان دهید که $x_{(m)}[n]$ دارای دورهٔ تناوب mN است.

(ب) نشان دهید که اگر:

$$x[n] = v[n] + w[n],$$

باشد، آنگاه داریم:

$$x_{(m)}[n] = v_{(m)}[n] + w_{(m)}[n].$$

(پ) با فرض آن که برای عدد صحیح $k_\circ$، $x[n] = e^{j2\pi k_\circ n/N}$ باشد، ثابت کنید که:

$$x_{(m)}[n] = \frac{1}{m}\sum_{l=\circ}^{N-1} e^{j2\pi(k_\circ + lN)n/(mN)}.$$

یعنی یک نمایی مختلط در $x[n]$ به یک ترکیب خطی از m نمایی مختلط در $x_{(m)}[n]$ تبدیل می‌شود.

(ت) با استفاده از نتایج قسمتهای (الف)، (ب)، و (پ) نشان دهید که اگر $x[n]$ دارای ضرایب فوریهٔ a_k باشد، آنگاه $x_{(m)}[n]$ باید دارای ضرایب فوریهٔ $\frac{1}{m}a_k$ باشد.

۳-۵۶ گیریم که $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب N و ضرایب فوریهٔ a_k باشد.
(الف) ضرایب فوریهٔ b_k برای $|x[n]|^2$ را برحسب a_k بیان کنید.
(ب) اگر ضرایب a_k حقیقی باشند، آیا ضرایب b_k نیز قطعاً حقیقی هستند؟

۳-۵۷ (الف) فرض کنید:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \qquad \text{(م ۳-۵۷-۱)}$$

و

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} b_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

سیگنال‌هایی متناوب باشند. نشان دهید که :

$$x[n]y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

که در آن :

$$c_k = \sum_{l=0}^{N-1} a_l b_{k-l} = \sum_{l=0}^{N-1} a_{k-l} b_l.$$

(ب) با نشان دادن این که :

$$c_k = \sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{k-l} = \sum_{l=\langle N\rangle} a_{k-l} b_l$$

می‌باشد، نتیجهٔ قسمت (الف) را تعمیم دهید.

(پ) از نتیجهٔ قسمت (ب) استفاده کرده و نمایش سری فوریهٔ سیگنال‌های زیر را بیابید که در آنها $x[n]$ در معادلهٔ (م۳-۵۷-۱) داده شده است.

(۱) $x[n]\cos\left(\frac{6\pi n}{N}\right)$

(۲) $x[n]\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN]$

(۳) $x[n]\left(\sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta\left[n-\frac{rN}{3}\right]\right)$ (فرض کنید که N بر ۳ بخش‌پذیر است)

(ت) نمایش سری فوریهٔ سیگنال $x[n]y[n]$ را بیابید که در آن ،

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

و

$$y[n] = \begin{cases} 1, & |n| \le 3 \\ 0, & 4 \le |n| \le 6 \end{cases}$$

متناوب با دورهٔ تناوب ۱۲ می‌باشند.

(ث) از نتیجهٔ قسمت (ب) استفاده کرده و نشان دهید که :

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]y[n] = N\sum_{l=\langle N\rangle} a_l b_{-l},$$

و از روی این عبارت، رابطهٔ پارسوال را برای سیگنال‌های متناوب زمان‌ـگسسته به دست آورید.

۵۸ـ گیریم که $x[n]$ و $y[n]$ سیگنال‌هایی متناوب با دورهٔ تناوب مشترک (N) باشند و گیریم که:

$$z[n] = \sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]$$

کانولوشن متناوب آنها باشد.

(الف) نشان دهید که $z[n]$ نیز متناوب با دورهٔ تناوب N است.

(ب) ثابت کنید که اگر a_k، b_k، و c_k به ترتیب ضرایب فوریهٔ $x[n]$، $y[n]$، و $z[n]$ باشند، آنگاه:

$$c_k = Na_k b_k.$$

(پ) گیریم که:

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

و:

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$

دو سیگنال باشند که متناوب با دورهٔ تناوب ۸ هستند. نمایش سری فوریهٔ کانولوشن متناوب این دوسیگنال را بیابید.

(ت) برای دو سیگنال متناوب زیر نیز که دارای دورهٔ تناوب ۸ هستند، قسمت (پ) را تکرار کنید:

$$x[n] = \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right), & 0 \le n \le 3 \\ 0, & 4 \le n \le 7 \end{cases}$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad 0 \le n \le 7.$$

۵۹ـ (الف) فرض کنید که $x[n]$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب N است. نشان دهید که ضرایب سری فوریهٔ سیگنال متناوب زیر:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta(t-kT)$$

با دورهٔ تناوب N متناوب است.

(ب) فرض کنید که $x(t)$ یک سیگنال متناوب با دورهٔ تناوب T و ضرایب سری فوریهٔ a_k با دورهٔ تناوب N باشد. نشان دهید که یک دنبالهٔ متناوب $g[n]$ باید وجود داشته باشد چنان که:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\delta(t-kT/N).$$

(پ) آیا یک سیگنال متناوب پیوسته می‌تواند ضرایب فوریهٔ متناوب داشته باشد؟

۶۰ـ۴ جفت سیگنال‌های $x[n]$ و $y[n]$ زیر را درنظر بگیرید. برای هر جفت تعیین کنید که آیا سیستم LTI زمان‌ـگسسته‌ای وجود دارد که وقتی $x[n]$ ورودی آن باشد، خروجی متناظر برابر $y[n]$ باشد. اگر چنین سیستمی وجود داشت، تعیین کنید که آیا سیستم یکتا است (یعنی آیا برای جفت ورودی‌ـخروجی داده شده بیش از یک سیستم LTI وجود دارد). همچنین پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI با رفتار موردنظر را تعیین کنید. در صورتی که برای جفت $x[n]$ و $y[n]$ داده شده چنین سیستم LTI یی وجود ندارد، علت را توضیح دهید.

(الف) $x[n]=(\frac{1}{2})^n$, $y[n]=(\frac{1}{4})^n$

(ب) $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$, $y[n]=(\frac{1}{4})^n u[n]$

(پ) $x[n]=(\frac{1}{2})^n u[n]$, $y[n]=4^n u[-n]$

(ت) $x[n]=e^{jn/8}$, $y[n]=2e^{jn/8}$

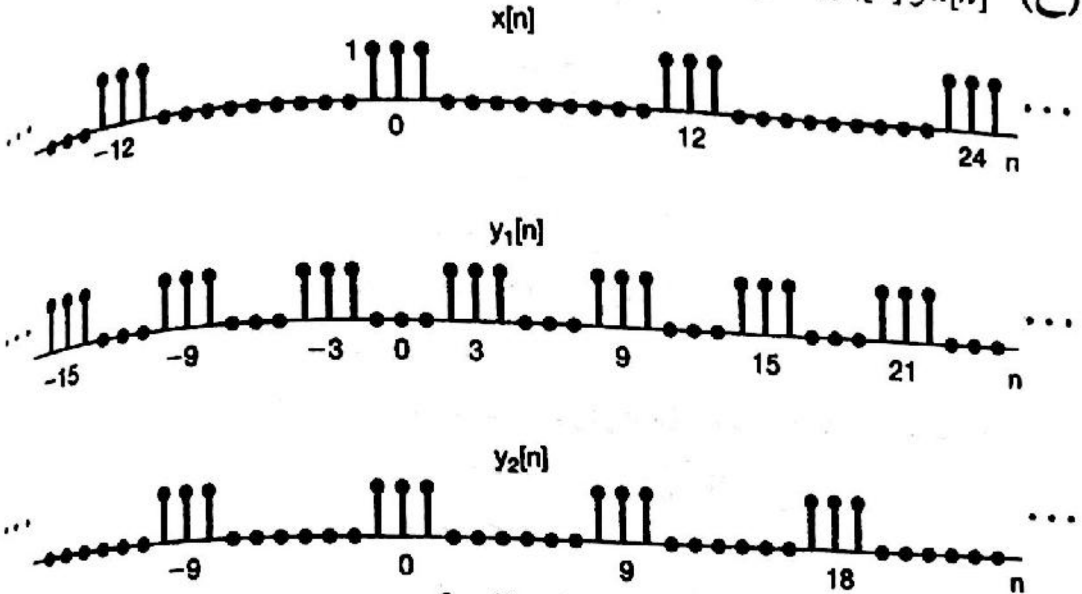
(ث) $x[n]=e^{jn/8} u[n]$, $y[n]=2e^{jn/8} u[n]$

(ج) $x[n]=j^n$, $y[n]=2j^n(1-j)$

(چ) $x[n]=\cos(\pi n/3)$ ، $y[n]=\cos(\pi n/3)+\sqrt{3}\sin(\pi n/3)$

(ح) $x[n]$ و $y_1[n]$ به صورت داده شده در شکل م۳-۶۰

(خ) $x[n]$ و $y_2[n]$ به صورت داده شده در شکل م۳-۶۰



شکل م۳-۶۰

۳-۶۱ همان‌طور که دیدیم، چون نمایی‌های مختلط متناوب توابع ویژهٔ سیستم‌های LTI هستند، روشهای تحلیل فوریه در بررسی سیستم‌های LTI زمان- پیوسته دارای اهمیت هستند. در این مسأله می‌خواهیم این مطلب را به اثبات برسانیم که: اگرچه ممکن است برخی از سیستم‌های LTI توابع ویژهٔ دیگری نیز داشته باشند، نمایی‌های مختلط تنها سیگنال‌هایی هستند که توابع ویژهٔ هر سیستم LTI هستند.

(الف) توابع ویژهٔ سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ واحد $h(t)=\delta(t)$ کدامند؟ مقادیر ویژهٔ مربوط کدامند؟

(ب) سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)=\delta(t-T)$ را درنظر بگیرید. سیگنالی را بیابید که به صورت e^{st} نبوده امّا یک تابع ویژهٔ سیستم با مقدار ویژهٔ ۱ باشد. به طور مشابه، توابع ویژه‌ای با مقادیر ویژهٔ $\frac{1}{2}$ و ۲ بیابید که نمایی‌های مختلط نباشند. (راهنمایی: می‌توانید قطارهای ضربه‌ای را بیابید که این شرایط را برآورند.)

(پ) یک سیستم LTI پایدار را درنظر بگیرید که پاسخ ضربهٔ $h(t)$ آن حقیقی و زوج است. نشان دهید که $\cos\omega t$ و $\sin\omega t$ توابع ویژهٔ این سیستم هستند.

(ت) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربهٔ $h(t)=u(t)$ درنظر بگیرید. فرض کنید که $\phi(t)$ یک

تابع ویژهٔ این سیستم با مقدار ویژهٔ λ باشد. معادلهٔ دیفرانسیلی را که $\phi(t)$ باید در آن صدق کند، بیابید و معادله را حل کنید. این نتیجه به همراه نتایج قسمتهای (الف) تا (پ) باید اعتبار مطلب مطرح شده در ابتدای این مسأله را به اثبات برساند.

۶۲-۳ یک روش ساختن منبع تغذیهٔ dc این است که یک سیگنال ac را گرفته و آن را به طور تمام موج یکسو نماییم. یعنی سیگنال ac ی $x(t)$ را از سیستمی عبور می‌دهیم که خروجی $y(t) = |x(t)|$ را ایجاد می‌کند.

(الف) اگر $x(t) = \cos \omega t$ باشد، شکل موجهای ورودی و خروجی را رسم کنید. دوره‌های تناوب اصلی ورودی و خروجی کدامند.

(ب) اگر $x(t) = \cos \omega t$ باشد، ضرایب سری فوریهٔ خروجی $y(t)$ را تعیین کنید.

(پ) دامنهٔ مؤلفهٔ dc سیگنال ورودی برابر چیست؟ دامنهٔ مؤلفهٔ dc سیگنال خروجی برابر چیست؟

۶۳-۳ فرض کنید که سیگنال متناوب زمان- پیوسته‌ای ورودی یک سیستم LTI است. این سیگنال دارای نمایش سری فوریهٔ زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{|k|} e^{jk(\pi/4)t},$$

که در آن α عددی حقیقی بین صفر و یک است و پاسخ فرکانسی سیستم عبارت است از:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}.$$

برای آن که خروجی سیستم حداقل ۹۰٪ انرژی متوسط در هر دورهٔ تناوب $x(t)$ را دارا باشد، بزرگی W چقدر باید باشد؟

۶۴-۳ همان‌طور که در این فصل دیدیم، در مطالعهٔ سیستم‌های LTI ، مفهوم تابع ویژه یک ابزار بسیار مهم است. در مورد سیستم‌های خطی، امّا تغییرپذیر با زمان، نیز می‌توان همین بیان را مطرح کرد. مشخصاً، چنین سیستمی را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. گوییم سیگنال $\phi(t)$ یک تابع ویژهٔ این سیستم است اگر:

$$\phi(t) \longrightarrow \lambda\phi(t).$$

یعنی اگر $x(t) = \phi(t)$ باشد، آنگاه $y(t) = \lambda\phi(t)$ است که در آن ثابت مختلط λ را مقدار ویژهٔ متناظر با $\phi(t)$ می‌نامند.

(الف) فرض کنید که ورودی $x(t)$ سیستم را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی از توابع ویژهٔ $\phi_k(t)$ ، هر کدام با مقدار ویژهٔ متناظر λ_k، نوشت؛ یعنی:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t).$$

خروجی $y(t)$ سیستم را برحسب $\{c_k\}$، $\{\phi_k(t)\}$، و $\{\lambda_k\}$ بیان کنید.

(ب) سیستم مشخص شده با معادلهٔ دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y(t) = t^2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + t\frac{dx(t)}{dt}.$$

آیا این سیستم خطی است؟ آیا تغییر ناپذیر با زمان است؟

(پ) نشان دهید که توابع

$$\phi_k(t) = t^k$$

توابع ویژهٔ سیستم در قسمت (ب) هستند. برای هر $\phi_k(t)$، مقدار ویژهٔ متناظر λ_k را تعیین کنید.

(ت) اگر

$$x(t) = 10t^{-10} + 3t + \frac{1}{2}t^4 + \pi$$

باشد، خروجی سیستم را تعیین کنید.

مسائل تعمیمی

۳-۶۵ دو تابع $u(t)$ و $v(t)$ را متعامد در بازهٔ (a,b) گویند اگر:

$$\int_a^b u(t)\, v^*(t)dt = 0. \quad (۱-۶۵-۳\text{م})$$

علاوه بر این، اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b |u(t)|^2 dt = 1 = \int_a^b |v(t)|^2 dt,$$

گویند توابع نرمالیزه شده‌اند و از این‌رو آنها را متعامد یکّه می‌نامند. مجموعه‌ای از توابع $\{\phi_k(t)\}$ را یک مجموعهٔ متعامد (یا متعامد یکّه) گویند اگر هر جفت تابع در این مجموعه متعامد (یا متعامد یکّه) باشند.

(الف) جفت سیگنال‌های $u(t)$ و $v(t)$ را که در شکل م۳-۶۵ ترسیم شده‌اند، درنظر بگیرید. تعیین کنید که آیا هرجفت در بازهٔ $(0,4)$ متعامد است.

(ب) آیا توابع $\sin m\omega_0 t$ و $\sin n\omega_0 t$ در بازهٔ $(0,T)$، که در آن $T = 2\pi/\omega_0$ است، متعامدند؟ آیا متعامد یکّه نیز هستند؟

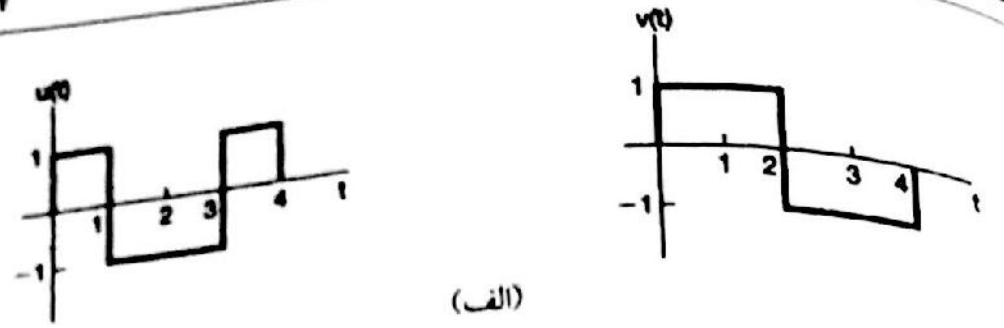
(پ) قسمت (ب) را برای توابع $\phi_m(t)$ و $\phi_n(t)$، که در آن:

$$\phi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}[\cos k\omega_0 t + \sin k\omega_0 t]$$

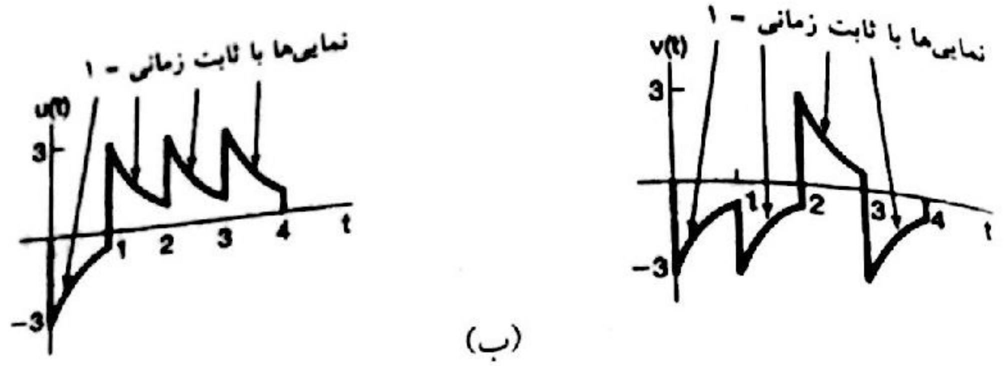
می‌باشد، تکرار کنید.

(ت) نشان دهید که توابع $\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}$ در هر بازه‌ای به طول $T = 2\pi/\omega_0$ متعامدند. آیا متعامد یکّه هستند؟

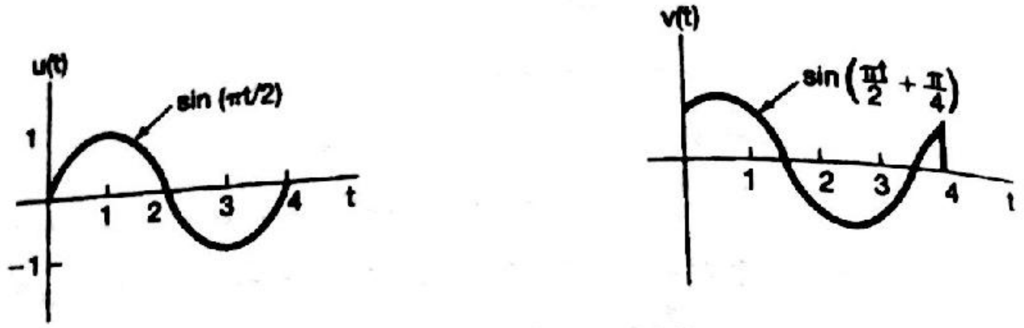
(ث) فرض کنید که $x(t)$ یک سیگنال دلخواه بوده، و $x_o(t)$ و $x_e(t)$ به ترتیب جزءهای فرد و زوج



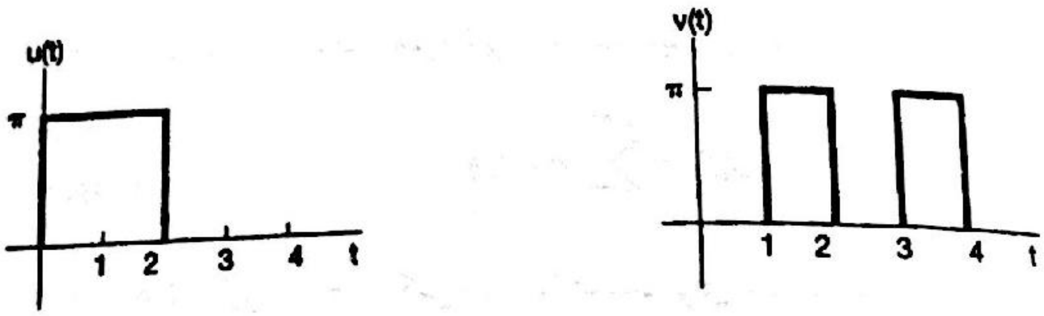
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل م۳-۶۵

$x(t)$ باشند. نشان دهید که $x_o(t)$ و $x_e(t)$ در بازهٔ $(-T, T)$ به ازای هر T متعامد هستند.

(ج) نشان دهید که اگر $\{\phi_k(t)\}$ مجموعه‌ای از سیگنال‌های متعامد در بازهٔ (a, b) باشد، آنگاه مجموعهٔ $\{1/\sqrt{A_k}\,\phi_k(t)\}$ که در آن:

$$A_k = \int_a^b |\phi_k(t)|^2 dt$$

می‌باشد، متعامد یکّه است.

(چ) گیریم $\{\phi_i(t)\}$ یک مجموعه از سیگنال‌های متعامد یکّه در بازهٔ (a,b) باشد، و سیگنالی به صورت زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \sum_i a_i \phi_i(t),$$

که در آن a_iها ثابتهای مختلط هستند. نشان دهید که :

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \sum_i |a_i|^2 .$$

(ح) فرض کنید که $\phi_1(t)$، ...، $\phi_N(t)$ فقط در بازهٔ زمانی $0 \le t \le T$ غیرصفر بوده و در این بازهٔ زمانی متعامد یکّه هستند. گیریم L_i یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ زیر را نشان دهد:

$$h_i(t) = \phi_i(T-t). \quad \text{(م۳-۶۵-۲)}$$

نشان دهید که اگر $\phi_j(t)$ به این سیستم اعمال شود، آنگاه خروجی در زمان T اگر $i=j$ باشد برابر یک واگر $i \neq j$ باشد برابر صفر است. سیستم با پاسخ ضربهٔ داده شده در معادلهٔ (م۳-۶۵-۲) را در مسائل ۲-۶۶ و ۲-۶۷ فیلتر تطبیق شده برای سیگنال $\phi_i(t)$ نامیدیم.

۶۶-۳ هدف این مسأله آن است که نشان دهد نمایش یک سیگنال متناوب دلخواه با سری فوریه، یا به طور کلی‌تر، به صورت یک ترکیب خطی از هر مجموعه‌ای از توابع متعامد، از نظر محاسباتی کارآمد بوده و در نتیجه برای به دست آوردن تقریبهای خوبی از سیگنال‌ها بسیار مفید است.[۱۲]
مشخصاً فرض کنید $\{\phi_i(t)\}$، $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$، مجموعه‌ای از توابع متعامد یکّه در بازهٔ $a \le t \le b$ باشد و $x(t)$ سیگنال مفروضی باشد. تقریب زیر را برای $x(t)$ در بازهٔ $a \le t \le b$ درنظر بگیرید:

$$\hat{x}_N(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \phi_i(t). \quad \text{(م۳-۶۶-۱)}$$

در اینجا a_iها ثابتهایی (در حالت کلی مختلط) هستند. برای سنجش میزان تفاوت بین $x(t)$ و تقریب به سری آن $\hat{x}_N(t)$، خطای $e_N(t)$ راکه به صورت زیر تعریف می‌شود، درنظر می‌گیریم:

$$e_N(t) = x(t) - \hat{x}_N(t). \quad \text{(م۳-۶۶-۲)}$$

یک معیار منطقی و متداول برای سنجش کیفیت تقریب، انرژی سیگنال خطا در بازهٔ موردنظر — یعنی انتگرال توان دوم اندازهٔ خطا در بازهٔ $a \le t \le b$ می‌باشد:

[۱۲] برای تعاریف توابع متعامد و متعامد یکّه، مسألهٔ ۳-۶۵ را ببینید.

$$E = \int_a^b |e_N(t)|^2 dt. \qquad (م۳-۶۶-۳)$$

(الف) نشان دهید که با انتخاب

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)\, dt, \qquad (م۳-۶۶-۴)$$

E حداقل می‌شود. [راهنمایی: از معادلات (م۳-۶۶-۱) تا (م۳-۶۶-۳) برای بیان E برحسب a_i ، $\phi_i(t)$ ، و $x(t)$ استفاده کنید. سپس a_i را در مختصات مستطیلی به صورت $a_i = b_i + jc_i$ بیان کرده و نشان دهید که a_i داده شده در معادلهٔ (م۳-۶۶-۴) ، در معادلات

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad و \quad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0 \qquad , \qquad i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, N$$

صدق می‌کند.]

(ب) اگر:

$$A_i = \int_a^b |\phi_i(t)|^2\, dt$$

باشد و $\{\phi_i(t)\}$ متعامد بوده امّا متعامد یکّه نباشد، نتیجهٔ قسمت (الف) چه تغییری می‌کند؟

(پ) فرض کنید که $\phi_n(t) = e^{jn\omega_0 t}$ بوده و هر بازه‌ای به طول $T_0 = 2\pi/\omega_0$ را انتخاب کنید. نشان دهید که a_iهایی که E را حداقل می‌کنند، به صورت معادلهٔ (۳-۵۰) داده می‌شوند.

(ت) مجموعه توابع والش مجموعه‌ای از توابع متعامد یکّه است که اغلب استفاده می‌شود. (مسألهٔ ۲-۶۶ را ببینید.) مجموعهٔ پنج تابع والش، $\phi_0(t)$ ، $\phi_1(t)$، ... ، $\phi_4(t)$ ، در شکل م ۳-۶۶ ترسیم شده‌اند که درآن زمان را چنان تغییر مقیاس داده‌ایم که $\phi_i(t)$ ها در بازهٔ $0 \le t \le 1$ غیرصفر و متعامد هستند. فرض کنید $x(t) = \sin \pi t$ باشد. تقریب $x(t)$ را به صورت زیر:

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} a_i\phi_i(t)$$

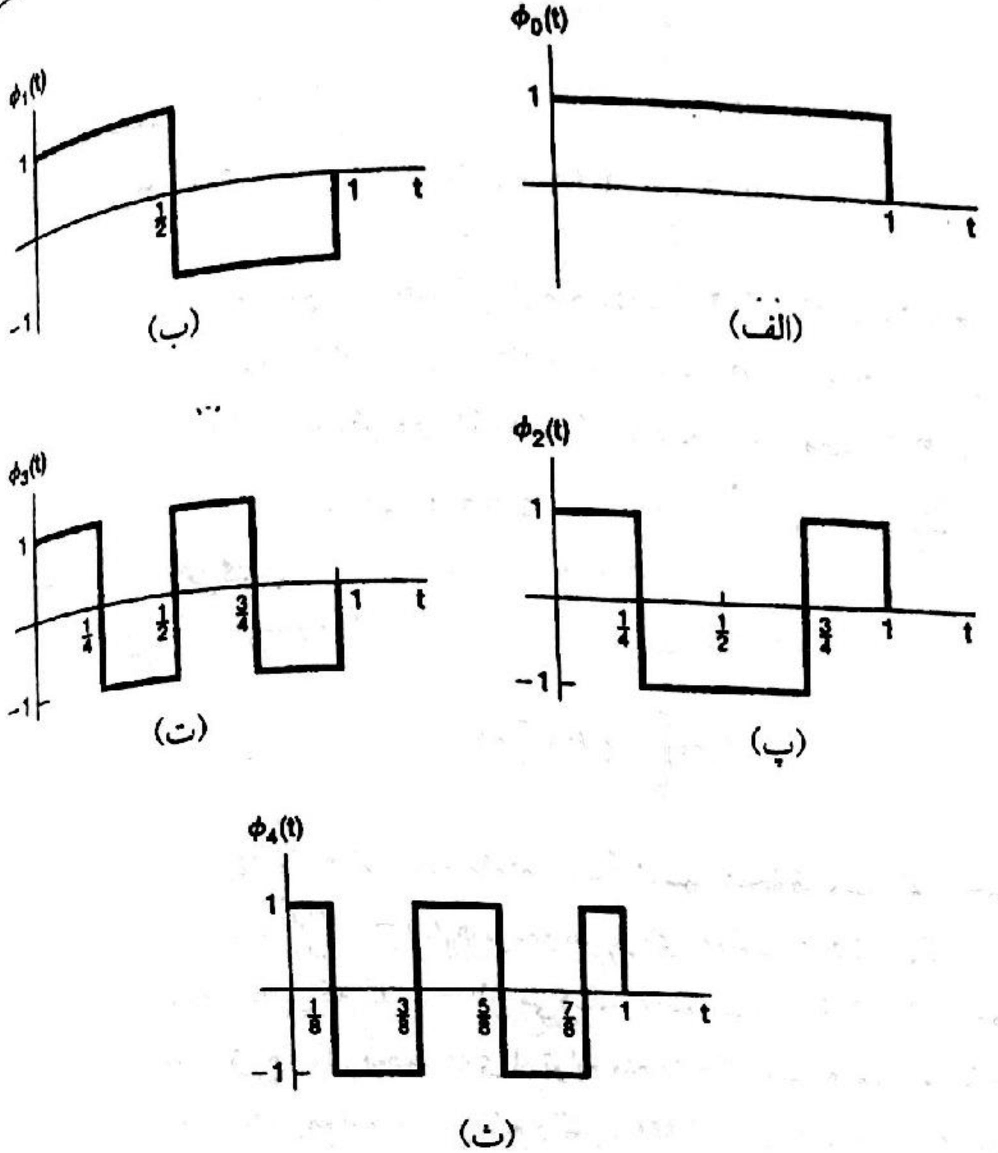
چنان بیابید که:

$$\int_0^1 |x(t) - \hat{x}(t)|^2\, dt$$

حداقل شود.

(ث) نشان دهید که اگر a_iها به صورت معادلهٔ (م۳-۶۶-۴) انتخاب شوند، $\hat{x}_N(t)$ در معادلهٔ (۳-۶۶-۱) و $e_N(t)$ در معادلهٔ (م۳-۶۶-۲) متعامد هستند.

نتایج قسمتهای (الف) و (ب) بسیار مهم هستند، از این نظر که نشان می‌دهند هر ضریب a_i مستقل از تمام a_j های دیگر ، $i \neq j$ ، می‌باشد. بنابراین اگر جملات بیشتری را به تقریب بیفزاییم [مثلاً اگر تقریب $\hat{x}_{N+1}(t)$ را محاسبه کنیم]، ضرایب $\phi_i(t)$ ، $i = 1, \ldots, N$ که قبلاً محاسبه شده‌اند،



شکل م۳-۶۶

تغییر نخواهند کرد. برخلاف این مطلب، یک نوع بسط به سری دیگر، سری تیلور چندجمله‌ای، را در نظر بگیرید. سری تیلور بی‌پایان برای e^t به صورت $e^t = 1+t+t^2/2!+\ldots$ می‌باشد، امّا همان طور که نشان خواهیم داد، وقتی که یک سری چندجمله‌ای پایاندار و معیار خطا در معادلهٔ (م۳-۶۶-۳) را درنظر بگیریم، به نتیجهٔ بسیار متفاوتی می‌رسیم.

مشخصاً، گیریم $\phi_0(t) = 1$ ، $\phi_1(t) = t$ ، $\phi_2(t) = t^2$ ، و غیره.

(ج) آیا $\phi_i(t)$ها در بازهٔ $0 \le t \le 1$ متعامدند؟

(چ) تقریبی از $x(t) = e^t$ در بازهٔ $0 \le t \le 1$ را به صورت زیر درنظر بگیرید:

$$\hat{x}(t) = a_0 \phi_0(t).$$

مقدار a_0 را چنان بیابید که انرژی سیگنال خطا در این بازه حداقل شود.

(ح) اکنون می‌خواهیم e^t را به وسیلهٔ سری تیلور با استفاده از دوجمله تقریب بزنیم —یعنی،

$\hat{x}_1(t) = a_0 + a_1 t$. مقادیر بهینهٔ a_0 و a_1 را بیابید. [راهنمایی: E را برحسب a_0 و a_1 محاسبه و سپس دستگاه معادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{\partial E}{\partial a_0} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E}{\partial a_1} = 0$$

توجه کنید که جواب حاصل برای a_0، نسبت به مقدار آن در قسمت (ج) که فقط یک جمله در سری داشتیم، تغییر کرده است. اگر باز هم تعداد جملات سری را بیفزاییم، این ضرایب و تمام ضرایب دیگر همچنان تغییر خواهند کرد. بدین ترتیب می‌توان به مزیّتی که از بسط یک تابع با استفاده از جملات متعامد حاصل می‌شود، پی برد.]

۳-۶۷ همان طور که در متن کتاب مطرح شد، ریشه‌های تحلیل فوریه را می‌توان درمسائل فیزیک ریاضی یافت. به خصوص انگیزهٔ کار فوریه، تحقیق او در بارهٔ انتشار حرارت بود. در این مسأله ما چگونگی وارد شدن سری فوریه در این تحقیق را تشریح می‌کنیم.[13]

مسألهٔ تعیین دما را در عمق معینی از زیر سطح زمین به صورت تابعی از زمان درنظر بگیرید، که در اینجا فرض می‌شود که دما در سطح زمین تابع مفروضی از زمان $T(t)$ می‌باشد که متناوب با دورهٔ تناوب ۱ است. (واحد زمان برابر یک سال گرفته شده است.) گیریم $T(x, t)$ دما در عمق x از زیر سطح زمین و در زمان t را نشان دهد. این تابع از معادلهٔ انتشار حرارت پیروی می‌کند:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \qquad \text{(م۳-۶۷-۱)}$$

با شرط کمکی:

$$T(0, t) = T(t). \qquad \text{(م۳-۶۷-۲)}$$

در اینجا k برابر ثابت انتشار حرارت برای زمین است ($k>0$). فرض کنید که $T(t)$ را به سری فوریه بسط دهیم:

$$T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{jn2\pi t}. \qquad \text{(م۳-۶۷-۳)}$$

به طور مشابه، $T(x, t)$ را در هر عمق مفروض x به سری فوریه‌ای برحسب t بسط می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(x) e^{jn2\pi t}, \qquad \text{(م۳-۶۷-۴)}$$

که در آن ضرایب فوریهٔ $b_n(x)$ به عمق x بستگی دارند.

(الف) از معادلات (م۳-۶۷-۱) تا (م۳-۶۷-۴) استفاده کرده و نشان دهید که $b_n(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیل زیر:

---

[13] این مسأله برگرفته از کتاب **معادلات با مشتقات جزئی در فیزیک**، از A. Sommerfeld (New York : Academic Press, 1949)، صفحات ۶۸ تا ۷۱، می‌باشد.

Scanned by CamScanner

$$\frac{d^2 b_n(x)}{dx^2} = \frac{4\pi jn}{k^2}\, b_n(x)$$

(م۳-۶۷-۵ الف)

با شرط کمکی:

$$b_n(0) = a_n$$

(م۳-۶۷-۵ب)

صدق می‌کند. چون معادلهٔ (م۳-۶۷-۵ الف) یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم است، به شرط کمکی دوّمی هم نیاز داریم. به دلایل فیزیکی می‌توان گفت که در عمق زیاد از زیر سطح زمین، تغییرات دما ناشی از نوسانات حرارتی سطح باید محو شود. یعنی:

$$\lim_{x\to\infty} T(x, t) = \text{ثابت}$$

(م۳-۶۷-۵پ)

(ب) نشان دهید که جواب معادلات (م۳-۶۷-۵) به صورت زیر است:

$$b_n(x) = \begin{cases} a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1+j)x/k], & n \geq 0 \\ a_n \exp[-\sqrt{2\pi|n|}(1-j)x/k], & n \leq 0 \end{cases}.$$

(پ) بنابراین نوسانات دما در عمق x، نسخه‌های میرا شده و انتقال فاز یافتهٔ نوسانات دما در سطح زمین است. برای واضح‌تر شدن این مطلب فرض کنید:

$$T(t) = a_0 + a_1 \sin 2\pi t$$

(که در آن a_0 نشان دهندهٔ میانگین دمای سالانه است). به ازای:

$$x = k\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

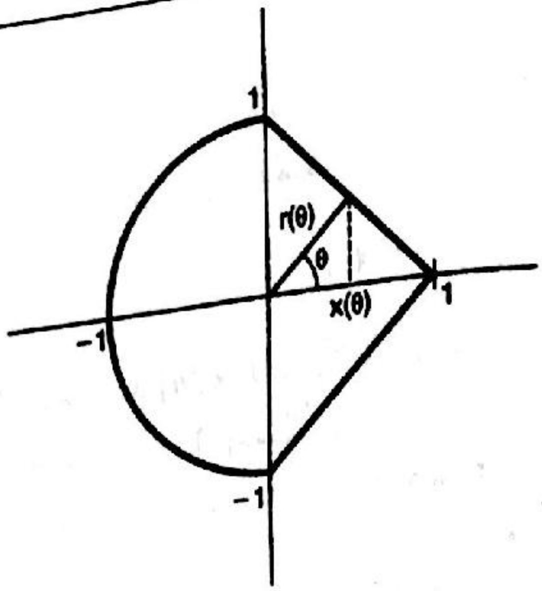
$a_0 = 2$، و $a_1 = 1$ نمودارهای $T(t)$ و $T(x, t)$ را در یک دورهٔ تناوب یک ساله رسم کنید. توجه کنید که در این عمق نه تنها نوسانات دما به طور عمده‌ای میرا شده‌اند، بلکه انتقال فاز چنان است که دما در زمستان، گرمترین و در تابستان، سردترین است. این امر دقیقاً دلیل آن است که چرا انبارهای زیرزمینی سبزیجات ساخته می‌شوند!

۳-۶۸ مسیر بستهٔ نشان داده شده در شکل م۳-۶۸ را درنظر بگیرید. همان طور که در تصویر آمده است، می‌توان چنین تصور کرد که این منحنی به وسیلهٔ نوک یک بردار دوّار با طول متغیر پیموده می‌شود. گیریم $r(\theta)$ نشان دهندهٔ طول این بردار برحسب تابعی از زاویهٔ θ باشد. بدین ترتیب $r(\theta)$ برحسب θ متناوب با دورهٔ تناوب 2π است و بنابراین دارای نمایش سری فوریه می‌باشد. فرض کنید $\{a_k\}$ نشان دهندهٔ ضرایب فوریهٔ $r(\theta)$ باشد.

(الف) اکنون همان طور که در شکل نشان داده شده است، تصویر بردار $r(\theta)$ روی محور xها، یعنی $x(\theta)$ را درنظر بگیرید. ضرایب فوریهٔ $x(\theta)$ را برحسب a_k ها تعیین کنید.

(ب) دنبالهٔ ضرایب زیر را درنظر بگیرید:

$$b_k = a_k e^{jk\pi/4}.$$



شکل م۳-۶۸

شکلی را که متناظر با این مجموعه ضرایب باشد، در صفحه رسم کنید.

(پ) قسمت (ب) را در حالت زیر تکرار کنید:

$$b_k = a_k \delta[k].$$

(ت) شکلهایی را در صفحه چنان رسم کنید که $r(\theta)$ ثابت نبوده و در عین حال دارای هر یک از خواص زیر باشد:

(۱) $r(\theta)$ زوج است.

(۲) دورهٔ تناوب اصلی $r(\theta)$ برابر π است.

(۳) دورهٔ تناوب اصلی $r(\theta)$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

۳-۶۹ در این مسأله، همتای زمان-گسستهٔ مفاهیم مطرح شده در مسائل ۳-۶۵ و ۳-۶۶ را درنظر می‌گیریم. مشابه با حالت زمان-پیوسته، دوسیگنال زمان-گسستهٔ $\phi_k[n]$ و $\phi_m[n]$ را در بازهٔ $(N_۱, N_۲)$ متعامد گویند اگر:

$$\sum_{n=N_۱}^{N_۲} \phi_k[n]\phi_m{}^*[n] = \begin{cases} A_k, & k=m \\ ۰, & k \neq m \end{cases} . \qquad (م۳-۶۹-۱)$$

اگر مقدار ثابتهای A_k و A_m هر دو برابر یک باشند، آنگاه سیگنال‌ها را متعامد یکّه گویند.

(الف) سیگنال‌های زیر را درنظر بگیرید:

$$\phi_k[n] = \delta[n-k], \quad k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots, \pm N.$$

نشان دهید که این سیگنال‌ها در بازهٔ $(-N, N)$ متعامد یکّه هستند.

(ب) نشان دهیدکه سیگنال‌های:

$$\phi_k[n] = e^{jk(۲\pi/N)n}, \quad k = ۰, ۱, \ldots, N-۱$$

در هر بازه‌ای به طول N متعامد هستند.

(پ) نشان دهید که اگر:

$$x[n] = \sum_{i=1}^{M} a_i \phi_i[n]$$

باشد، که در آن $\phi_i[n]$ ها در بازهٔ (N_1, N_2) متعامدند، آنگاه :

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |x[n]|^2 = \sum_{i=1}^{M} |a_i|^2 A_i \, .$$

(ت) فرض کنید $\phi_i[n]$ ، $i = 0, 1, ..., M$ ، مجموعه‌ای از توابع متعامد در بازهٔ (N_1, N_2) باشند و فرض کنید که $x[n]$ سیگنال مفروضی باشد. همچنین فرض کنید که می‌خواهیم $x[n]$ را به صورت یک ترکیب خطی از $\phi_i[n]$ها تقریب بزنیم؛ یعنی :

$$\hat{x}[n] = \sum_{i=0}^{M} a_i \phi_i[n],$$

که در آن a_iها ضرایب ثابتی هستند. فرض کنید:

$$e[n] = x[n] - \hat{x}[n],$$

و نشان دهید که اگر بخواهیم عبارت

$$E = \sum_{n=N_1}^{N_2} |e[n]|^2$$

را حداقل کنیم، آنگاه a_iها با رابطهٔ زیر داده می‌شوند:

$$a_i = \frac{1}{A_i} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] \phi_i^*[n].$$

[راهنمایی : همانند مسألهٔ ۳-۶۶، E را برحسب a_i، $\phi_i[n]$، A_i، و $x[n]$بیان کنید، a_i را به صورت $a_i = b_j + jc_i$ بنویسید ، و نشان دهید که a_i داده شده در معادلهٔ (م۳-۶۹-۲) در معادلات زیر صدق می‌کند:

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E}{\partial c_i} = 0.$$

توجه کنید که اعمال این نتیجه وقتی که $\phi_i[n]$ همانند قسمت (ب) باشد، به معادلهٔ (۳-۹۵) برای a_k منجر می‌شود.]

(ث) نتیجهٔ قسمت (ت) را وقتی $\phi_i[n]$ ها به صورت داده شده در قسمت (الف) هستند، اعمال کرده و ضرایب a_i را بر حسب $x[n]$ تعیین کنید.

۳-۷۰ (الف) در این مسأله تعریف سری فوریهٔ دوبُعدی را برای سیگنال‌های متناوبی با دو متغیر مستقل درنظر می‌گیریم. مشخصاً، سیگنال $x(t_1, t_2)$ را که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند، درنظر بگیرید:

$$x(t_1, t_2) = x(t_1 + T_1,\ t_2 + T_2), \quad \text{برای تمام } t_1 \text{ و } t_2.$$

این سیگنال درجهت t_1 با دورهٔ تناوب T_1 و در جهت t_2 با دورهٔ تناوب T_2 متناوب است.

چنین سیگنالی دارای نمایش سری به صورت زیر است:

$$x(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{mn} e^{j(m\omega_1 t_1 + n\omega_2 t_2)},$$

که در آن:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}.$$

برای a_{mn} عبارتی را برحسب $x(t_1, t_2)$ بیابید.

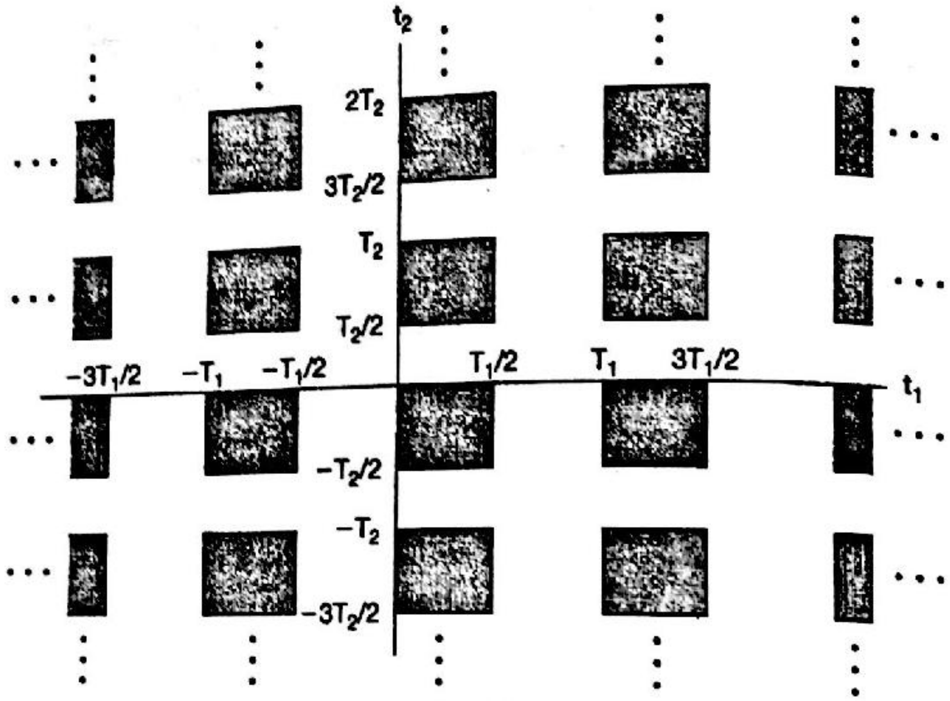
(ب) برای سیگنال‌های زیر ضرایب سری فوریهٔ a_{mn} را تعیین کنید:

(۱) $\cos(2\pi t_1 + 2t_2)$

(۲) سیگنال به تصویر درآمده در شکل م۳-۷۰

در نواحی سایه خورده $x(t_1, t_2) = 1$

و صفر درجاهای دیگر

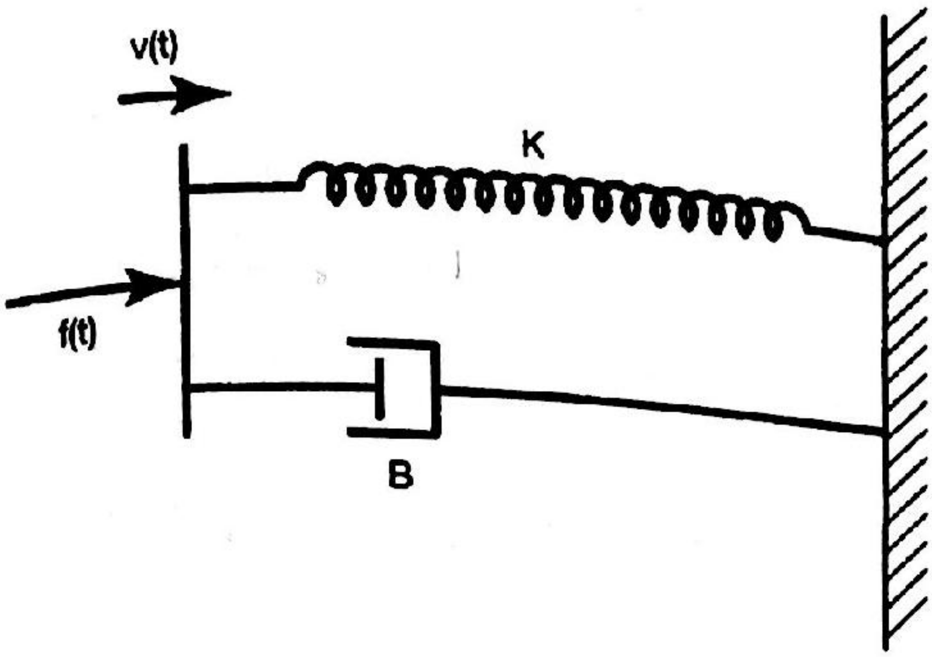


شکل م۳-۷۰

۳-۷۱ سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل م۳-۷۱ را درنظر بگیرید. معادلهٔ دیفرانسیلی که سرعت $v(t)$ را به نیروی ورودی $f(t)$ مرتبط می‌سازد، به صورت زیر است:

$$Bv(t) + K\int v(t)dt = f(t).$$

(الف) با فرض این که خروجی $f_s(t)$، نیروی فشاری عمل کننده روی فنر باشد، معادلهٔ دیفرانسیلی را بنویسید که $f_s(t)$ و $f(t)$ را به هم مرتبط می‌سازد. پاسخ فرکانسی سیستم را به دست آورده و نشان دهید که پاسخ فرکانسی یک فیلتر پایین گذر را تقریب می‌زند.



شکل م۳-۷۱

(ب) با فرض این که خروجی $f_d(t)$، نیروی فشاری عمل کننده روی میراکننده، باشد، معادلهٔ دیفرانسیلی را بنویسید که $f_d(t)$ و $f(t)$ را به هم مرتبط می‌سازد. پاسخ فرکانسی سیستم را به دست آورده و نشان دهید که پاسخ فرکانسی یک فیلتر بالاگذر را تقریب می‌زند.