بخش نخست از مسائل به مباحث پایه‌ای تعلق دارد و جوابهای آنها در انتهای کتاب ارائه شده است.
سه بخش بعدی شامل مسائلی هستند که به ترتیب به مباحث پایه‌ای، پیشرفته، و تعمیمی تعلق دارند.
در **مسائل تعمیمی**، کاربردها، مفاهیم، یا روشهایی فراتر از آن چه که در متن کتاب ارائه شد، مطرح می‌شود.

مسائل پایه‌ای با جواب

۱-۲ فرض کنید:

$$x[n] = \delta[n] + ۲\delta[n-۱] - \delta[n-۳] \quad \text{و} \quad h[n] = ۲\delta[n+۱] + ۲\delta[n-۱].$$

هر یک از کانولوشن‌های زیر را محاسبه و رسم کنید:

(الف) $y_۱[n] = x[n] * h[n]$ (ب) $y_۲[n] = x[n+۲] * h[n]$

(پ) $y_۳[n] = x[n] * h[n+۲]$

۲-۲ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\{u[n+۳] - u[n-۱۰]\}.$$

A و B را بر حسب n چنان بیان کنید که معادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-k-۱}, & A \le k \le B \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}.$$

۳-۲ ورودی $x[n]$ و پاسخ ضربهٔ واحد $h[n]$ راکه به صورت زیر داده شده‌اند، درنظر بگیرید:

$$x[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^{n-۲} u[n-۲],$$

$$h[n] = u[n+۲].$$

خروجی $y[n] = x[n] * h[n]$ را تعیین و رسم کنید.

۲-۴ برای

$$x[n] = \begin{cases} ۱, & ۳ \le n \le ۸ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} ۱, & ۴ \le n \le ۱۵ \\ ۰, & \text{در غیراین صورت} \end{cases},$$

$y[n] = x[n] * h[n]$ را محاسبه و رسم کنید.

۲-۵ فرض کنید:

$$x[n] = \begin{cases} ۱, & ۰ \le n \le ۹ \\ ۰, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{و} \quad h[n] = \begin{cases} ۱, & ۰ \le n \le N \\ ۰, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

که در آن $۹ \le N$ یک عدد صحیح است. با فرض این که $y[n] = x[n] * h[n]$ و

$$y[۴] = ۵ \quad , \quad y[۱۴] = ۰$$

باشد، مقدار N را تعیین کنید.

۲-۶ برای

$$x[n] = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{-n} u[-n-۱] \quad \text{و} \quad h[n] = u[n-۱]$$

کانولوشن $y[n] = x[n] * h[n]$ را محاسبه و رسم کنید.

۲-۷ در یک سیستم خطی S رابطهٔ زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن برقرار است:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] g[n-۲k],$$

که در آن $g[n] = u[n] - u[n-۴]$ می‌باشد.

(الف) برای $x[n] = \delta[n-۱]$، $y[n]$ را تعیین کنید.

(ب) برای $x[n] = \delta[n-۲]$، $y[n]$ را تعیین کنید.

(پ) آیا S یک سیستم LTI است؟

(ت) برای $x[n] = u[n]$، $y[n]$ را تعیین کنید.

۲-۸ کانولوشن دوسیگنال زیر را تعیین و رسم کنید:

$$x(t)=\begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2, \\ 0, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1).$$

۲-۹ فرض کنید:

$$h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5).$$

A و B را چنان تعیین کنید که:

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)}, & \tau < A \\ 0, & A<\tau<B. \\ e^{2(t-\tau)}, & B<\tau \end{cases}$$

۲-۱۰ فرض کنید که:

$$x(t)=\begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ 0, & \text{در غیراین صورت} \end{cases}$$

و $h(t)=x(t/\alpha)$ باشد، که در آن $0<\alpha \le 1$ است.

(الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ را تعیین و رسم کنید.

(ب) اگر $dy(t)/dt$ فقط شامل سه ناپیوستگی باشد، مقدار α چیست؟

۲-۱۱ فرض کنید:

$$x(t)=u(t-3)-u(t-5) \quad \text{و} \quad h(t)=e^{-3t}u(t).$$

(الف) $y(t)=x(t)*h(t)$ را محاسبه کنید:

(ب) $g(t)=(dx(t)/dt)*h(t)$ را محاسبه کنید.

(پ) چگونه $g(t)$ به $y(t)$ مربوط می‌شود؟

۲-۱۲ فرض کنید:

$$y(t)=e^{-t}u(t)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-3k).$$

نشان دهید که برای $0 \le t < 3$، $y(t)=Ae^{-t}$ است، و مقدار A را تعیین کنید.

۲-۱۳ سیستم زمان-گسستهٔ S_1 را با پاسخ ضربهٔ زیر در نظر بگیرید:

$$h[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n].$$

(الف) عدد صحیح A را چنان بیابید که $h[n]-Ah[n-1]=\delta[n]$ باشد.

(ب) با استفاده از نتیجهٔ قسمت (الف)، پاسخ ضربهٔ $g[n]$ را برای سیستم LTI S_2 که معکوس سیستم S_1 است، تعیین کنید.

۲-۱۴ کدام یک از پاسخهای ضربهٔ زیر متناظر با سیستم‌های LTI پایدار است؟

(الف) $h_1(t) = e^{-(1-2j)t}u(t)$ (ب) $h_2(t) = e^{-t}\cos(2t)u(t)$

۱۵-۲ کدام یک از پاسخهای ضربهٔ زیر متناظر با سیستم‌های LTI پایدار است؟

(الف) $h_1[n] = n\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ (ب) $h_2[n] = 3^n u[-n+10]$

۱۶-۲ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید:

(الف) اگر برای $n<N_1$ ، $x[n]=0$ و برای $n<N_2$ ، $h[n]=0$ باشد، آنگاه برای $n<N_1+N_2$ ، $x[n]*h[n]=0$ است.

(ب) اگر $y[n]=x[n]*h[n]$ باشد، آنگاه $y[n-1]=x[n-1]*h[n-1]$ است.

(پ) اگر $y(t)=x(t)*h(t)$ باشد، آنگاه $y(-t)=x(-t)*h(-t)$ است.

(ت) اگر برای $t>T_1$ ، $x(t)=0$ و برای $t>T_2$ ، $h(t)=0$ باشد، آنگاه برای $t>T_1+T_2$ ، $x(t)*h(t)=0$ است.

۱۷-۲ یک سیستم LTI را درنظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = x(t). \qquad \text{(م ۲-۱۷-۱)}$$

همچنین سیستم در شرط سکون اولیه صدق می‌کند.

(الف) اگر $x(t) = e^{(-1+3j)t}u(t)$ باشد، $y(t)$ برابر چیست؟

(ب) توجه کنید که $\Re e\{x(t)\}$ با $\Re e\{y(t)\}$ در معادلهٔ (م ۲-۱۷-۱) صدق می‌کند. برای

$$x(t) = e^{-t}\cos(3t)u(t)$$

خروجی $y(t)$ سیستم LTI را تعیین کنید.

۱۸-۲ یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادلهٔ تفاضلی زیر به هم مربوط می‌شوند:

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n-1] + x[n].$$

برای $x[n] = \delta[n-1]$ ، $y[n]$ را تعیین کنید.

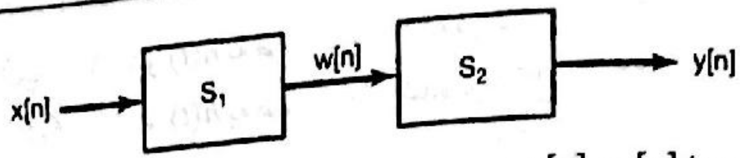
۱۹-۲ اتصال متوالی دو سیستم S_1 و S_2 را، چنان که در شکل م ۲-۱۹ نشان داده شده است، درنظر بگیرید:

S_1 : علّی LTI ,

$$w[n] = \frac{1}{2}w[n-1] + x[n];$$

S_1 : علّی LTI ,

$$y[n] = \alpha y[n-1] + \beta w[n].$$



شکل م۲-۱۹

معادلهٔ تفاضلی ارتباط دهندهٔ $y[n]$ و $x[n]$ به صورت زیر است:

$$y[n] = -\frac{۱}{۸} y[n-۲] + \frac{۳}{۴} y[n-۱] + x[n].$$

(الف) α و β را تعیین کنید.

(ب) پاسخ ضربهٔ اتصال متوالی $S_۱$ و $S_۲$ را بیابید.

۲-۲۰ انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید:

(الف) $\int_{-\infty}^{\infty} u_{۰}(t)\cos(t)\, dt$ (ب) $\int_{۰}^{۵} \sin(۲\pi t)\delta(t+۳)\, dt$

(پ) $\int_{-۵}^{۵} u_{۱}(۱-\tau)\cos(۲\pi\tau)\, d\tau$

مسائل پایه‌ای

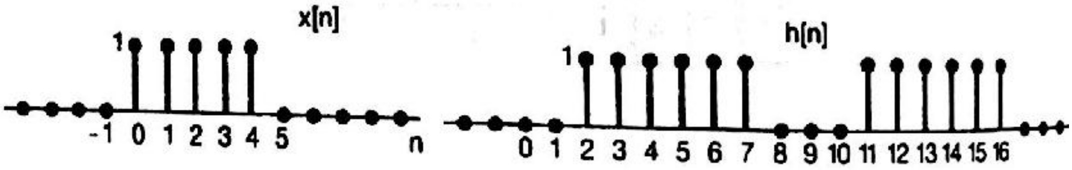
۲-۲۱ کانولوشن $y[n] = x[n]*h[n]$ را برای زوج سیگنال‌های زیر محاسبه کنید:

(الف) $\begin{cases} x[n] = \alpha^n u[n], \\ h[n] = \beta^n u[n], \end{cases} \alpha \neq \beta$ (ب) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

(پ) $x[n] = (-\frac{۱}{۲})^n u[n-۴]$

$h[n] = ۴^n u[۲-n]$

(ت) $x[n]$ و $h[n]$ به صورت داده شده در شکل م۲-۲۱ می‌باشند.



شکل م۲-۲۱

۲-۲۲ با استفاده از انتگرال کانولوشن، برای هر یک از زوج شکل موجهای زیر، پاسخ $y(t)$ سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t)$ و رودی $x(t)$ را بیابید. نتایج خود را ترسیم نمایید.

(الف) $\begin{cases} x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \\ h(t) = e^{-\beta t}u(t) \end{cases}$ (این مسأله را در هر دو حالت $\alpha \neq \beta$ و $\alpha = \beta$ حل کنید.)

(ب) $x(t) = u(t) - ۲u(t-۲) + u(t-۵)$

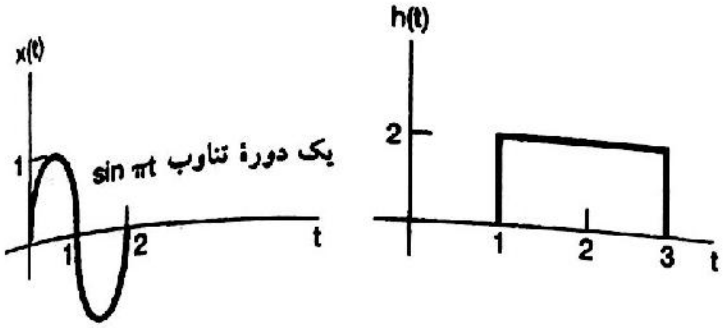
$h(t) = e^{۲t}u(۱-t)$

می‌باشند.

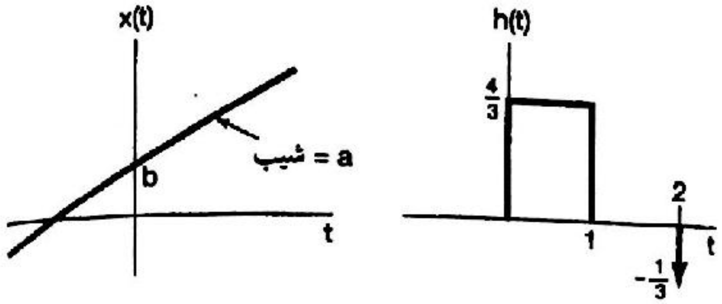
(پ) $x(t)$ و $h(t)$ به صورت داده شده در شکل م۲-۲۲(الف) می‌باشند.

(ت) $x(t)$ و $h(t)$ به صورت داده شده در شکل م۲-۲۲(ب) می‌باشند.

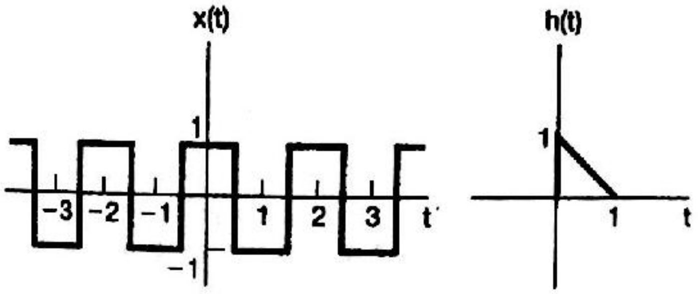
(ث) $x(t)$ و $h(t)$ به صورت داده شده در شکل م۲-۲۲(پ) می‌باشند.



(الف)



(ب)



(پ)

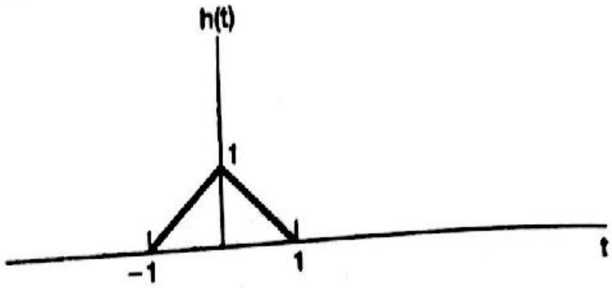
شکل م۲-۲۲

۲-۲۳ فرض کنید $h(t)$ پالس مثلثی نشان داده شده در شکل ۲-۲۳ (الف) و $x(t)$ قطار ضربهٔ ترسیم شده در شکل ۲-۲۳ (ب) باشد. یعنی :

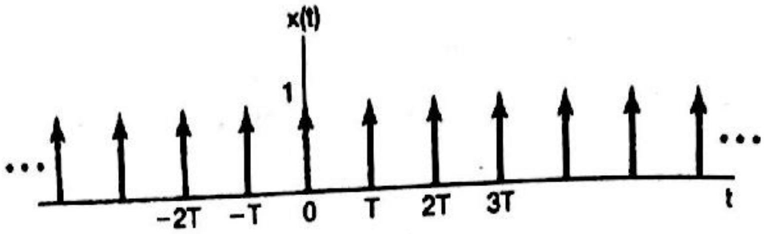
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-kT).$$

$y(t) = x(t) * h(t)$ را به ازای مقادیر زیر برای T تعیین و رسم کنید:

(الف) $T = ۴$ (ب) $T = ۲$ (پ) $T = ۳/۲$ (ت) $T = ۱$



(الف)



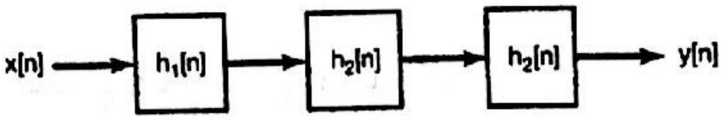
(ب)

شکل م۲-۲۳

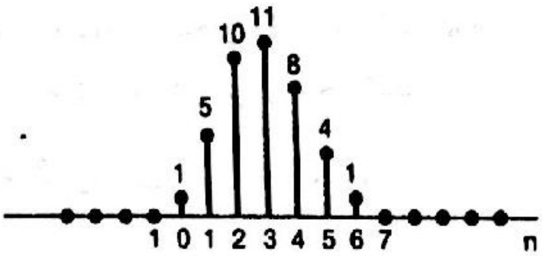
۲-۲۴ بهم پیوستن متوالی سه سیستم LTI علّی نشان داده شده در شکل م۲-۲۴ (الف) را در نظر بگیرید. پاسخ ضربهٔ $h_2[n]$ به صورت زیر :

$$h_2[n] = u[n] - u[n-2],$$

و پاسخ ضربهٔ کل به صورت نشان داده شده در شکل ۲-۲۴ (ب) است.



(الف)



(ب)

شکل م۲-۲٤

(الف) پاسخ ضربهٔ $h_1[n]$ را بیابید.

(ب) پاسخ کل سیستم را به ورودی زیر بیابید:

$$x[n] = \delta[n] - \delta[n-1].$$

۲-۲۵ سیگنال زیر را:

$$y[n] = x[n] * h[n],$$

که درآن:

$$x[n] = 3^n u[-n-1] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

و

$$h[n] = \left(\frac{۱}{۴}\right)^n u[n+۳]$$

است ، درنظر بگیرید.

(الف) بدون استفاده از خاصیت توزیع پذیری کانولوشن ، $y[n]$ را تعیین کنید.

(ب) با استفاده از خاصیت توزیع پذیری کانولوشن ، $y[n]$ را تعیین کنید.

۲–۲۶ محاسبهٔ عبارت زیر را :

$$y[n] = x_۱[n] * x_۲[n] * x_۳[n],$$

که در آن $x_۱[n] = (۰/۵)^n u[n]$، $x_۲[n] = u[n+۳]$ ، و $x_۳[n] = \delta[n] - \delta[n-۱]$ است، درنظر بگیرید.

(الف) کانولوشن $x_۱[n] * x_۲[n]$ را محاسبه کنید.

(ب) برای محاسبهٔ $y[n]$ ، نتیجهٔ قسمت (الف) را با $x_۳[n]$ کانولوشن بگیرید.

(پ) کانولوشن $x_۲[n] * x_۳[n]$ را محاسبه کنید.

(ت) برای محاسبهٔ $y[n]$، نتیجهٔ قسمت (پ) را با $x_۱[n]$ کانولوشن بگیرید.

۲–۲۷ سطح زیر یک سیگنال زمان- پیوستهٔ $v(t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_v = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)dt.$$

نشان دهید که اگر $y(t) = x(t) * h(t)$ باشد، آنگاه :

$$A_y = A_x A_h.$$

۲–۲۸ توابع زیر، پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTI زمان- گسسته هستند. برای هر سیستم تعیین کنید که آیا علّی و/ یا پایدار است. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) $h[n] = \left(\frac{۱}{۵}\right)^n u[n]$

(ب) $h[n] = (۰/۸)^n u[n+۲]$

(پ) $h[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n u[-n]$

(ت) $h[n] = (۵)^n u[۳-n]$

(ث) $h[n] = n\left(\frac{۱}{۳}\right)^n u[n-۱]$

(ج) $h[n] = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^n u[n] + (۱/۰۱)^n u[۱-n]$

(چ) $h[n] = \left(-\frac{۱}{۲}\right)^n u[n] + (۱/۰۱)^n u[n-۱]$

۲–۲۹ توابع زیر، پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTI زمان- پیوسته هستند. برای هر سیستم تعیین کنید که آیا علّی و/یا پایدار است. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) $h(t) = e^{-۴t}u(t-۲)$

(ب) $h(t) = e^{-۶t}u(۳-t)$

(پ) $h(t) = e^{-۲t}u(t+۵۰)$

(ت) $h(t) = e^{۲t}u(-۱-t)$

(ث) $h(t) = e^{-6|t|}$ (ج) $h(t) = te^{-t}u(t)$

(چ) $h(t) = (2e^{-t} - e^{(t-100)/100})u(t)$

۲-۳۰ معادلهٔ تفاضلی مرتبهٔ اول زیر را درنظر بگیرید:

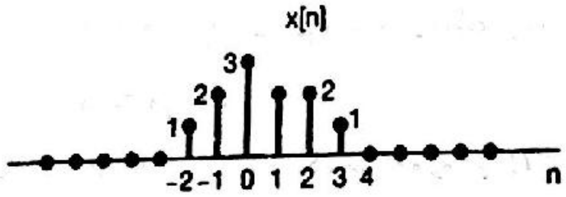
$$y[n] + 2y[n-1] = x[n].$$

با فرض شرط سکون اولیه (یعنی، اگر برای $n < n_0$ ، $x[n] = 0$ باشد، آنگاه برای $n < n_0$ ، $y[n] = 0$ است)، پاسخ ضربهٔ سیستمی را بیابید که ورودی و خروجی آن با این معادلهٔ تفاضلی به هم مربوط می‌شوند. مسأله را می‌توانید با دوباره مرتب کردن معادلهٔ تفاضلی به گونه‌ای که $y[n]$ برحسب $y[n-1]$ و $x[n]$ بیان شود، و سپس به دست آوردن مقادیر $y[0]$ ، $y[+1]$ ، $y[+2]$ ، ... به همین ترتیب حل کنید.

۲-۳۱ سیستم LTI یی را درنظر بگیرید که در سکون اولیه بوده و با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$y[n] + 2y[n-1] = x[n] + 2x[n-2].$$

با حل معادلهٔ تفاضلی به صورت بازگشتی، پاسخ این سیستم را به ورودی نشان داده شده در شکل م۲-۳۱ بیابید.



شکل م۲-۳۱

۲-۳۲ معادلهٔ تفاضلی زیر را درنظر بگیرید:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n], \qquad \text{(م ۲-۳۲-۱)}$$

و فرض کنید که:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]. \qquad \text{(م ۲-۳۲-۲)}$$

فرض کنید جواب $y[n]$ متشکل از مجموع یک جواب خصوصی $y_p[n]$ به معادلهٔ (م ۲-۳۲-۱) و جواب همگن $y_h[n]$ که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند، باشد:

$$y_h[n] - \frac{1}{2}y_h[n-1] = 0.$$

(الف) تحقیق کنید که جواب همگن به صورت زیر است:

$$y_h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(ب) اکنون به دست آوردن یک جواب خصوصی $y_p[n]$ را به طوری که

$$y_p[n] - \frac{1}{2} y_p[n-1] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

باشد، در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه $y_p[n]$ برای $n \geq 0$ به صورت $B\left(\frac{1}{3}\right)^n$ است، و با جایگذاری آن در معادلهٔ تفاضلی فوق، مقدار B را تعیین کنید.

(پ) فرض کنید که سیستم LTI توصیف شده با معادلهٔ (م ۲-۳۲-۱) و در سکون اولیه، دارای سیگنال ورودی مشخص شده با معادلهٔ (م ۲-۳۲-۲) باشد. چون برای $n < 0$، $x[n] = 0$ است، در نتیجه برای $n < 0$ ، $y[n] = 0$ است. همچنین ، بنا به قسمتهای (الف) و (ب)، می‌دانیم که برای $n \geq 0$ ، $y[n]$ به صورت زیر است :

$$y[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^n + B\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

برای به دست آوردن ثابت مجهول A، باید مقدار $y[n]$ را برای یک $n \geq 0$ مشخص کنیم. از شرط سکون اولیه و معادلات (م ۲-۳۲-۱) و (م ۲-۳۲-۲) برای تعیین $y[0]$ استفاده کنید. از روی این مقدار، ثابت A را تعیین کنید. نتیجهٔ این محاسبه، جواب معادلهٔ تفاضلی (م ۲-۳۲-۱) را تحت شرط سکون اولیه، و به ازای ورودی داده شده با معادلهٔ (م ۲-۳۲-۲)، به دست می‌دهد.

۲-۳۳ یک سیستم LTI را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول زیر صدق می‌کنند:

(م ۲-۳۳-۱)

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t).$$

همچنین سیستم در شرط سکون اولیه صدق می‌کند.

(الف) (۱) خروجی سیستم $y_1(t)$ را برای ورودی $x_1(t) = e^{3t}u(t)$ تعیین کنید.

(۲) خروجی سیستم $y_2(t)$ را برای ورودی $x_2(t) = e^{2t}u(t)$ تعیین کنید.

(۳) خروجی سیستم $y_3(t)$ را برای ورودی $x_3(t) = \alpha e^{3t}u(t) + \beta e^{2t}u(t)$، که در آن α و β اعدادی حقیقی هستند، تعیین کنید. نشان دهید که : $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$.

(۴) اکنون فرض کنید که $x_1(t)$ و $x_2(t)$ سیگنال‌های دلخواهی باشند به طوری که :

$$x_1(t) = 0, \quad t < t_1 \text{ برای}$$

$$x_2(t) = 0, \quad t < t_2 \text{ برای}$$

با فرض این که $y_1(t)$ خروجی سیستم برای ورودی $x_1(t)$، $y_2(t)$ خروجی سیستم برای ورودی $x_2(t)$، و $y_3(t)$ خروجی سیستم برای ورودی $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ باشند، نشان دهید که:

$$y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t).$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سیستم مورد نظر خطی است.

(ب) (۱) خروجی سیستم $y_1(t)$ را برای ورودی $x_1(t) = Ke^{2t}u(t)$ تعیین کنید.

(۲) خروجی سیستم $y_2(t)$ را برای ورودی $x_2(t) = Ke^{2(t-T)}u(t-T)$ تعیین کنید. نشان دهید که $y_2(t) = y_1(t-T)$ است.

(۳) اکنون فرض کنید که $x_1(t)$ سیگنال دلخواهی باشد به طوری که برای $t < t_0$، $x_1(t) = 0$ است. با فرض این که $y_1(t)$ خروجی سیستم برای ورودی $x_1(t)$ و $y_2(t)$ خروجی سیستم برای ورودی $x_2(t) = x_1(t-T)$ باشند، نشان دهید که:

$$y_2(t) = y_1(t-T).$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که سیستم مورد نظر تغییرناپذیر با زمان است. به همراه نتیجهٔ به دست آمده در قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که سیستم داده شده LTI است. چون این سیستم درشرط سکون اولیه صدق می‌کند، درنتیجه علّی نیز هست.

۲-۳۴ فرض سکون اولیه متناظر با شرط کمکی با مقدار صفر است که در زمانی که بر طبق سیگنال ورودی تعیین می‌گردد، تحمیل می‌شود. در این مسأله نشان می‌دهیم که اگر شرط کمکی مورد استفاده غیر صفر باشد و یا اگر همیشه در زمان ثابتی (صرف نظر از سیگنال ورودی) اعمال شود، سیستم متناظر نمی‌تواند LTI باشد. سیستمی را درنظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (م ۲-۳۳-۱) صدق می‌کنند.

(الف) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$، از یک مثال نقض استفاده کرده و نشان دهید که سیستم خطی نیست.

(ب) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$، از یک مثال نقض استفاده کرده و نشان دهید که سیستم تغییرناپذیر با زمان نیست.

(پ) با فرض شرط کمکی $y(1) = 1$، نشان دهید که سیستم خطی نموی است.

(ت) با فرض شرط کمکی $y(1) = 0$، نشان دهید که سیستم خطی بوده اما تغییرناپذیر با زمان نیست.

(ث) با فرض شرط کمکی $y(0) + y(4) = 0$، نشان دهید که سیستم خطی بوده اما تغییرناپذیر با زمان نیست.

۲-۳۵ در مسألهٔ قبل دیدیم که بکارگیری شرط کمکی در یک زمان ثابت (صرف نظر از سیگنال ورودی)، منجر به این می‌شود که سیستم متناظر تغییرناپذیر با زمان نباشد. در این مسأله، به بررسی اثر شرایط کمکی ثابت بر روی علّی بودن یک سیستم می‌پردازیم. سیستمی را درنظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و

خروجی $y(t)$ آن در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (م ۲-۳۳-۱) صدق می‌کنند. فرض کنید که شرط کمکی مربوط به معادلهٔ دیفرانسیل، $y(0) = 0$ باشد. خروجی سیستم را برای هر یک از دو ورودی زیر تعیین کنید:

(الف) برای تمام t ها، $x_1(t) = 0$

(ب)
$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > -1 \end{cases}$$

ملاحظه کنید که اگر $y_1(t)$ خروجی متناظر با ورودی $x_1(t)$، و $y_2(t)$ خروجی متناظر با $x_2(t)$ باشند، آنگاه $y_1(t)$ و $y_2(t)$ برای $t < -1$ یکسان نیستند، اگرچه $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای $t < -1$ یکسان هستند. از این مشاهده به عنوان پایه‌ای برای یک استدلال استفاده کرده و نتیجه بگیرید که سیستم داده شده علّی نیست.

۲-۳۶ یک سیستم زمان‌ـگسسته درنظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)y[n-1] + x[n].$$

(الف) نشان دهید که اگر این سیستم در شرط سکون اولیه صدق کند (یعنی، اگر برای $n < n_0$، $x[n] = 0$ باشد، آنگاه برای $n < n_0$، $y[n] = 0$ است)، آنگاه سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان است.

(ب) نشان دهید که اگر این سیستم در شرط سکون اولیه صدق نکند، ولی در عوض از شرط کمکی $y[0] = 0$ استفاده نماید، آنگاه سیستم علّی نیست. [راهنمایی: از روشی مشابه آن‌چه که در مسألهٔ ۲-۳۵ به کار برده شد، استفاده کنید.]

۲-۳۷ سیستمی را درنظر بگیرید که ورودی و خروجی آن با معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول (م ۲-۳۳-۱) به هم مرتبط می‌شوند. فرض کنید که سیستم در شرط سکون نهایی صدق می‌کند [یعنی، اگر برای $t > t_0$، $x(t) = 0$ باشد آنگاه برای $t > t_0$، $y(t) = 0$ است]. نشان دهید که این سیستم علّی نیست. [راهنمایی: دو ورودی به سیستم را درنظر بگیرید، $x_1(t) = 0$ و $x_2(t) = e^t(u(t) - u(t-1))$، که به ترتیب خروجیهای $y_1(t)$ و $y_2(t)$ را نتیجه می‌دهند. آنگاه نشان دهید که برای $t < 0$، $y_1(t) \neq y_2(t)$ است.]

۲-۳۸ نمایشهای دیاگرام بلوکی سیستم‌های LTI علّی توصیف شده با معادلات تفاضلی زیر را رسم کنید:

(الف) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + \frac{1}{2}x[n]$

(ب) $y[n] = \frac{1}{3}y[n-1] + x[n-1]$

۲-۳۹ نمایشهای دیاگرام بلوکی سیستم‌های LTI علّی توصیف شده با معادلات دیفرانسیل زیر را رسم کنید:

(الف) $y(t) = -(\frac{۱}{۲})\, dy(t)/dt + ۴x(t)$ **(ب)** $dy(t)/dt + ۳y(t) = x(t)$

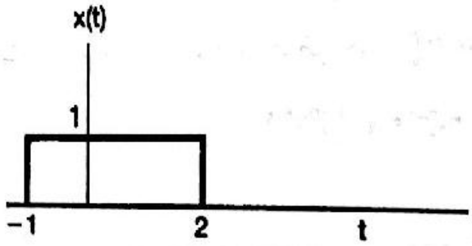
مسائل پیشرفته

۲-۴۰ **(الف)** یک سیستم LTI را درنظر بگیرید که ورودی و خروجی آن از طریق معادلهٔ زیر بـه هـم مرتبط می‌شوند:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - ۲)\, d\tau.$$

پاسخ ضربهٔ $h(t)$ این سیستم چیست؟

(ب) پاسخ سیستم را برای ورودی $x(t)$ نشان داده شده در شکل م۲-۴۰ تعیین کنید.



شکل م۲-۴۰

۲-۴۱ سیگنال زیر را درنظر بگیرید:

$$x[n] = \alpha^n [n].$$

(الف) سیگنال $g[n] = x[n] - \alpha x[n-۱]$ را رسم کنید.

(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) همراه با خواص کانولوشن استفاده کرده و دنبالهٔ $h[n]$ را چنان تعیین کنید که:

$$x[n] * h[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n \{u[n+۲] - u[n-۲]\}.$$

۲-۴۲ سیگنال‌های

$$x(t) = u(t + ۰{,}۵) - u(t - ۰{,}۵)$$

و

$$h(t) = e^{j\omega_0 t}$$

را درنظر بگیرید.

(الف) مقداری را برای ω_0 تعیین کنید که تضمین می‌کند:

$$y(۰) = ۰,$$

که در اینجا $y(t) = x(t) * h(t)$ می‌باشد.

(ب) آیا جواب شما به قسمت قبل ، یکتا است؟

۲-۴۳ یکی از خواص مهم کانولوشن ، هم در زمان- پیوسته و هم در زمان-گسسته، خاصیت شرکت‌پذیری است. در این مسأله ، این خاصیت را بررسی و تشریح می‌کنیم.

(الف) تساوی

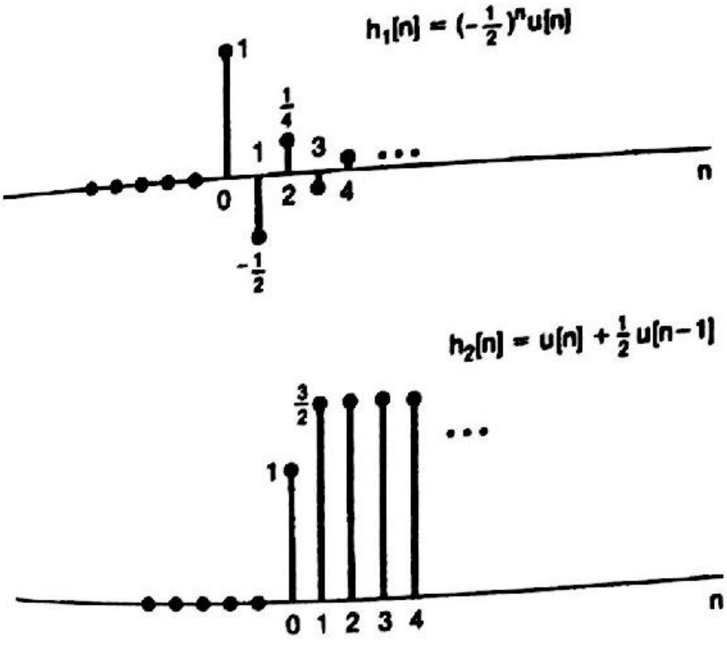
$$[x(t) * h(t)] * g(t) = x(t) * [h(t) * g(t)] \qquad \text{(م ۲-۴۳-۱)}$$

را با نشان دادن این که هر دو طرف معادلهٔ (م ۲-۴۳-۱) برابر

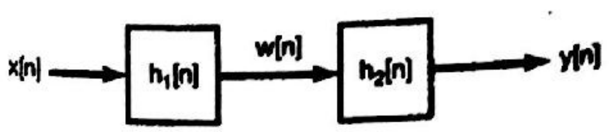
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(\sigma)g(t-\tau-\sigma)d\tau\, d\sigma$$

است ، ثابت کنید.

(ب) دو سیستم LTI را با پاسخهای نمونهٔ واحد $h_1[n]$ و $h_2[n]$ که در شکل م ۲-۴۳ (الف) نشان داده شده‌اند، درنظر بگیرید. این دو سیستم همان طور که در شکل م ۲-۴۳ (ب) نشان داده شده است، با هم متوالی شده‌اند. فرض کنید $x[n] = u[n]$ باشد.



(الف)



(ب)

شکل م۲-۴۳

(۱) $y[n]$ را نخست با محاسبهٔ $w[n] = x[n] * h_1[n]$ و سپس محاسبهٔ $y[n] = w[n] * h_2[n]$ محاسبه کنید؛ یعنی ، $y[n] = [x[n] * h_1[n]] * h_2[n]$.

(۲) اکنون $y[n]$ را نخست با کانولوشن گرفتن $h_1[n]$ و $h_2[n]$ برای به دست آوردن $g[n] = h_1[n] * h_2[n]$ و سپس کانولوشن گرفتن $x[n]$ با $g[n]$ برای به دست آوردن $y[n] = x[n] * [h_1[n] * h_2[n]]$، بیابید.

جوابهای (۱) و (۲) باید یکسان باشند و این خاصیت شرکت پذیری کانولوشن زمان‌ـگسسته را نشان می‌دهد.

(پ) اتصال متوالی دوسیستم LTI را همانند شکل م ۲-۴۳ (ب) درنظر بگیرید، که در این حالت،

$$h_1[n] = \sin 8n$$

و

$$h_2[n] = a^n u[n] \,, \quad |a| < 1,$$

بوده و ورودی به صورت

$$x[n] = \delta[n] - a\delta[n-1]$$

است. خروجی $y[n]$ را تعیین کنید. (راهنمایی: استفاده از خواص شرکت پذیری و جابجایی‌پذیری کانولوشن، حل را بسیار ساده می‌کند.)

۲-۴۴ (الف) اگر

$$x(t) = 0 \,, \quad |t| > T_1,$$

و

$$h(t) = 0 \,, \quad |t| > T_2,$$

باشند، آنگاه به ازای یک عدد مثبت T_3 داریم:

$$x(t) * h(t) = 0 \quad , \quad |t| > T_3,$$

T_3 را برحسب T_1 و T_2 بیان کنید.

(ب) یک سیستم LTI زمان‌ـگسسته دارای ورودی $x[n]$، پاسخ ضربهٔ $h[n]$، و خروجی $y[n]$ است. اگر بدانیم $h[n]$ در هر جا از خارج بازهٔ $N_0 \le n \le N_1$ صفر است و $x[n]$ در هر جا از خارج بازهٔ $N_2 \le n \le N_3$ صفر است، آنگاه خروجی $y[n]$ مقید می‌شود که در هر جا، بجز در یک بازهٔ $N_4 \le n \le N_5$، صفر باشد.

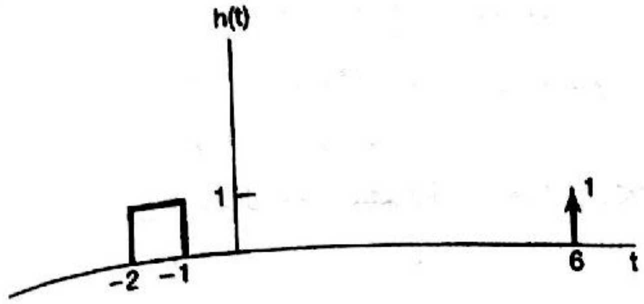
$N_4 = N_0 + N_2 \qquad N_5 = N_1 + N_3$

(۱) N_4 و N_5 را برحسب N_0، N_1، N_2 و N_3 تعیین کنید.

(۲) اگر بازهٔ $N_0 \le n \le N_1$ به طول M_h، بازهٔ $N_2 \le n \le N_3$ به طول M_x، و بازهٔ $N_4 \le n \le N_5$ به طول M_y باشند، M_y را برحسب M_h و M_x بیان کنید.

(پ) یک سیستم LTI زمان‌ـگسسته با این خاصیت درنظر بگیرید که اگر ورودی آن برای تمام $n \ge 10$، $x[n] = 0$ باشد، آنگاه خروجی آن برای تمام $n \ge 15$، $y[n] = 0$ است. برای درست بودن این مطلب، پاسخ ضربهٔ این سیستم، $h[n]$، باید در چه شرطی صدق کند؟

(ت) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربهٔ نشان داده شده در شکل م۲-۴۴ درنظر بگیرید. در چه بازه‌ای $x(t)$ را باید بدانیم تا بتوانیم $y(0)$ را تعیین کنیم؟



شکل م۲-٤٤

۲-۴۵ (الف) نشان دهید که اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی $x(t)$ برابر خروجی $y(t)$ باشد، آنگاه پاسخ سیستم به ورودی

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

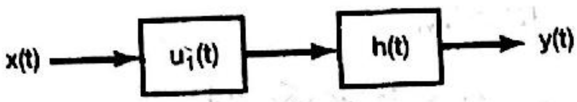
برابر $y'(t)$ است. این مسأله را به سه روش مختلف حل کنید:

(۱) مستقیماً از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان و این واقعیت که:

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t) - x(t-h)}{h} .$$

(۲) با مشتق‌گیری از انتگرال کانولوشن.

(۳) با بررسی سیستم در شکل م۲-۴۵.



شکل م۲-٤٥

(ب) درستی روابط زیر را نشان دهید:

(۱) $y'(t) = x(t) * h'(t)$

(۲) $$y(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right) * h'(t) = \int_{-\infty}^{t} [x'(\tau) * h(\tau)]d\tau = x'(t) * \left(\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau\right)$$

[راهنمایی: این روابط را می‌توان با استفاده از دیاگرام‌های بلوکی نظیر آن چه که در (۳) از قسمت (الف) آمده است، و این واقعیت که $u_1(t) * u_{-1}(t) = \delta(t)$، به سادگی نشان داد.]

(پ) یک سیستم LTI دارای پاسخ $y(t) = \sin \omega_0 t$ به ورودی $x(t) = e^{-5t} u(t)$ است. برای کمک در تعیین پاسخ ضربهٔ این سیستم از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کنید.

(ت) فرض کنید $s(t)$ پاسخ پلهٔ واحد یک سیستم LTI زمان-پیوسته باشد. از قسمت (ب) استفاده کرده و نتیجه بگیرید که پاسخ $y(t)$ به ورودی $x(t)$ برابر است با:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)s(t-\tau)d\tau. \qquad (م۲-۴۵-۱)$$

همچنین نشان دهید که:

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x'(\tau)u(t-\tau)d\tau. \qquad (م۲-۴۵-۲)$$

(ث) از معادلهٔ (م ۲-۴۵-۱) استفاده کرده و پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ پلهٔ

$$s(t)=(e^{-3t}-2e^{-2t}+1)u(t)$$

را به ورودی $x(t)=e^{t}\,u(t)$ تعیین کنید.

(ج) فرض کنید $s[n]$ پاسخ پلهٔ واحد یک سیستم LTI زمان-گسسته باشد. همتاهای زمان-گسستهٔ معادلات (م۲-۴۵-۱) و (م۲-۴۵-۲) کدام است؟

۲-۴۶ سیستم LTIی S و سیگنال $x(t)=2^{-3t}u(t-1)$ را درنظر بگیرید. اگر

$$x(t)\longrightarrow y(t)$$

و

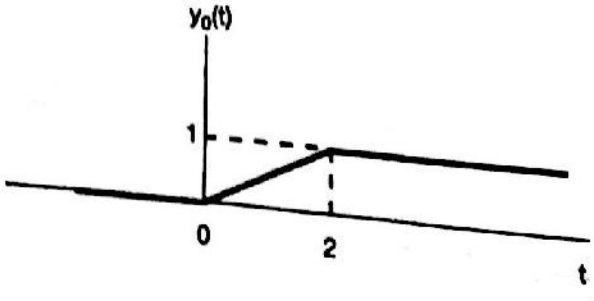
$$\frac{dx(t)}{dt}\longrightarrow -3y(t)+e^{-2t}u(t),$$

پاسخ ضربهٔ $h(t)$ را برای S تعیین کنید.

۲-۴۷ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با پاسخ ضربهٔ $h_0(t)$ داده شده است. گفته می‌شود که وقتی ورودی $x_0(t)$ باشد، خروجی $y_0(t)$ است که در شکل م۲-۴۷ ترسیم شده است. مجموعه ورودیهای زیر به سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان با پاسخهای ضربهٔ مشخص شده، اعمال شده است:

	ورودی $x(t)$	پاسخ ضربه $h(t)$
(الف)	$x(t)=2x_0(t)$	$h(t)=h_0(t)$
(ب)	$x(t)=2x_0(t)-x_0(t-2)$	$h(t)=h_0(t)$
(پ)	$x(t)=x_0(t-2)$	$h(t)=h_0(t+1)$
(ت)	$x(t)=x_0(-t)$	$h(t)=h_0(t)$
(ث)	$x(t)=x_0(-t)$	$h(t)=h_0(-t)$
(ج)	$x(t)=x_0'(t)$	$h(t)=h_0'(t)$

[در اینجا $x_0'(t)$ و $h_0'(t)$ به ترتیب نشان دهندهٔ مشتقهای اول $x_0(t)$ و $h_0(t)$ هستند.]



شکل م۲-۴۷

در هر یک از این حالتها، تعیین کنید که وقتی ورودی $x(t)$ بوده و سیستم دارای پاسخ ضربهٔ $h(t)$ است، آیا برای به دست آوردن خروجی $y(t)$ اطلاعات کافی داده شده است یا خیر. اگر تعیین $y(t)$ امکان‌پذیر باشد، ترسیم دقیقی از آن با ذکر صریح مقادیر عددی بر روی شکل، ارائه دهید.

۲-۴۸ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را در مورد سیستم‌های LTI تعیین کنید. جوابهای خود را توجیه کنید.

(الف) اگر $h(t)$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI بوده و $h(t)$ متناوب و غیرصفر باشد، سیستم ناپایدار است.

(ب) معکوس یک سیستم LTI علّی، همیشه علّی است.

(پ) اگر برای هر n، $|h[n]|\leq K$ باشد، که در آن K عدد مفروضی است، آنگاه سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$، پایدار است.

(ت) اگر یک سیستم LTI زمان-گسسته دارای پاسخ ضربهٔ $h[n]$ با طول محدود باشد، سیستم پایدار است.

(ث) اگر یک سیستم LTI علّی باشد، آنگاه پایدار هم هست.

(ج) اتصال متوالی یک سیستم LTI غیرعلّی با یک سیستم LTI علّی، لزوماً غیرعلّی است.

(چ) یک سیستم LTI زمان-پیوسته پایدار است، اگر و فقط اگر پاسخ پلهٔ آن $s(t)$ مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد ـــ یعنی، اگر و فقط اگر:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|\,dt < \infty.$$

(ح) یک سیستم LTI زمان-گسسته علّی است اگر و فقط اگر پاسخ پلهٔ واحد آن $s[n]$ برای $n<0$ برابر صفر باشد.

۲-۴۹ درمتن کتاب، نشان دادیم که اگر $h[n]$ مطلقاً جمع‌پذیر باشد، یعنی اگر:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty,$$

آنگاه سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ پایدار است. این بدان معنی است که مطلقاً جمع‌پذیر بودن یک شرط کافی برای پایداری است. در این مسأله، نشان می‌دهیم که این شرط یک شرط لازم نیز هست. یک سیستم LTI را با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ که مطلقاً جمع‌پذیر نیست درنظر بگیرید؛ یعنی

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| = \infty.$$

(الف) فرض کنید که ورودی به این سیستم به صورت زیر است:

$$x[n] = \begin{cases} 0, & \text{اگر } h[-n] = 0 \\ \dfrac{h[-n]}{|h[-n]|}, & \text{اگر } h[-n] \neq 0 \end{cases}$$

آیا این سیگنال ورودی نشان دهندهٔ یک ورودی کراندار است؟ اگر چنین است، کوچکترین عدد B به طوری که

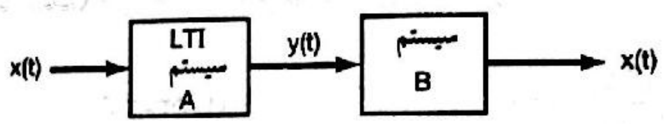
برای تمام n ها ، $|x[n]| \leq B$

باشد، برابر چیست ؟

(ب) برای این انتخاب خاص ورودی، خروجی را در $n = 0$ محاسبه کنید. آیا نتیجه مؤید این نظر هست که مطلقاً جمع‌پذیر بودن یک شرط لازم پایداری است؟

(پ) به طریقی مشابه، نشان دهید که یک سیستم LTI زمان-پیوسته پایدار است اگر و فقط اگر پاسخ ضربهٔ آن مطلقاً انتگرال پذیر باشد.

۲-۵۰ اتصال متوالی دو سیستم نشان داده شده در شکل م۲-۵۰ را درنظر بگیرید. می‌دانیم که سیستم اول، A، LTI است و می‌دانیم که سیستم دوم، B، معکوس سیستم A است. فرض کنید $y_1(t)$ نشان دهندهٔ پاسخ سیستم A به $x_1(t)$، و $y_2(t)$ نشان دهندهٔ پاسخ سیستم A به $x_2(t)$ باشند.



شکل م۲-۵۰

(الف) پاسخ سیستم B به ورودی $ay_1(t) + by_2(t)$، که در آن a و b ثابت هستند، برابر چیست؟

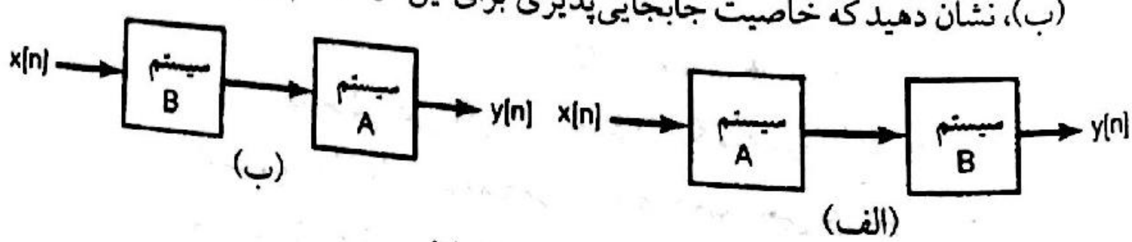
(ب) پاسخ سیستم B به ورودی $y_1(t-\tau)$ برابر چیست ؟

۲-۵۱ در متن کتاب، دیدیم که رابطهٔ ورودی-خروجی کلی برای اتصال متوالی دو سیستم LTI به ترتیبی که سیستم‌ها متوالی می‌شوند، بستگی ندارد. این واقعیت موسوم به خاصیت جابجایی‌پذیری است که هم به خطی بودن و هم به تغییرناپذیری با زمان هر دو سیستم وابسته است. در این مسأله، این نکته را تشریح می‌کنیم.

(الف) دو سیستم زمان-گسستهٔ A و B را درنظر بگیرید، که A یک سیستم LTI با پاسخ نمونهٔ واحد $h[n] = (\frac{1}{2})^n u[n]$ است. ازسوی دیگر، سیستم B خطی ولی تغییرپذیر با زمان است. مشخصاً، اگر ورودی به سیستم B برابر $w[n]$ باشد، خروجی آن برابر است با:

$$z[n] = nw[n].$$

با محاسبهٔ پاسخهای ضربهٔ ترکیبهای متوالی به ترتیب درشکلهای م۲-۵۱(الف) و م۲-۵۱ (ب)، نشان دهید که خاصیت جابجایی‌پذیری برای این دو سیستم برقرار نیست.



شکل م۲-۵۱

(ب) فرض کنید درهر یک از سیستمهای بهم پیوستهٔ شکل م ۲-۵۱، سیستم B را با سیستمی که رابطهٔ بین ورودی $w[n]$ و خروجی آن $z[n]$ به صورت زیر است، جایگزین کنیم:

$$z[n] = w[n] + ۲$$

محاسبات قسمت (الف) را برای این حالت تکرار کنید.

۲-۵۲ یک سیستم LTI زمان-گسسته را با پاسخ نمونهٔ واحد زیر:

$$h[n] = (n+۱)\alpha^n u[n],$$

که در آن $|\alpha| < ۱$ است، درنظر بگیرید. نشان دهید که پاسخ پلهٔ این سیستم برابر است با:

$$s[n] = \left[\frac{۱}{(\alpha-۱)^۲} - \frac{\alpha}{(\alpha-۱)^۲}\alpha^n + \frac{\alpha}{(\alpha-۱)}(n+۱)\alpha^n\right]u[n].$$

(راهنمایی: توجه کنید که $\sum_{k=۰}^{N}(k+۱)\alpha^k = \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=۰}^{N+۱}\alpha^k$)

۲-۵۳ (الف) معادلهٔ دیفرانسیل همگن زیر را درنظر بگیرید:

$$\sum_{k=۰}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = ۰. \qquad (\text{م}۲-۵۳-۱)$$

نشان دهید که اگر $s_۰$ یک جواب معادلهٔ

$$p(s) = \sum_{k=۰}^{N} a_k s^k = ۰ \qquad (\text{م}۲-۵۳-۲)$$

باشد، آنگاه $Ae^{s_۰t}$ یک جواب معادلهٔ (م۲-۵۳-۱) است، که در آن A ثابت مختلط دلخواهی است.

(ب) چند جمله‌ای $p(s)$ در معادلهٔ (م۲-۵۳-۲) را می‌توان برحسب ریشه‌های آن $s_۱, \ldots, s_r$ به صورت زیر تجزیه کرد:

$$p(s) = a_N(s-s_۱)^{\sigma_۱}(s-s_۲)^{\sigma_۲}\ldots(s-s_r)^{\sigma_r},$$

که در آن s_i ها جوابهای متمایز معادلهٔ (م۲-۵۳-۲) بوده و σ_i ها تعداد تکرار آنها می‌باشند ـــ یعنی، تعداد دفعاتی که هر ریشه به عنوان یک جواب معادله ظاهر می‌شود. توجه کنید که:

$$\sigma_۱ + \sigma_۲ + \ldots + \sigma_r = N.$$

در حالت کلی، اگر $\sigma_i > ۱$ باشد، آنگاه نه تنها Ae^{s_it} یک جواب معادلهٔ (م۲-۵۳-۱) است، بلکه $At^j e^{s_it}$ نیز، مادامی که j عدد صحیحی بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر یا مساوی $\sigma_i - ۱$ باشد، یک جواب معادله است. برای تشریح این امر، نشان دهید که اگر $\sigma_i = ۲$

باشد، آنگاه $Ate^{s_i t}$ یک جواب معادلهٔ (م۲-۵۳-۱) است.[راهنمایی: نشان دهید که اگر s عدد مختلط دلخواهی باشد، آنگاه:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k(Ate^{st})}{dt^k} = Ap(s)te^{st} + A\frac{dp(s)}{ds}e^{st}$$.]

بنابراین، عمومی‌ترین جواب معادلهٔ (م۲-۵۳-۱) به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{\sigma_i-1} A_{ij}t^j e^{s_i t},$$

که در آن A_{ij} ها ثابتهای مختلط دلخواهی هستند.

(پ) معادلات دیفرانسیل همگن زیر را، با شرایط کمکی مشخص شده، حل کنید.

(۱) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ۳\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = ۰,\ y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۲$$

(۲) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ۳\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = -۱$$

(۳) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ۳\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = ۰,\ y(۰) = ۰,\ y'(۰) = ۰$$

(۴) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ۲\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱$$

(۵) $$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} - \frac{dy(t)}{dt} - y(t) = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱,\ y''(۰) = -۲$$

(۶) $$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + ۲\frac{dy(t)}{dt} + ۵y(t) = ۰,\ y(۰) = ۱,\ y'(۰) = ۱$$

۲-۵۴ (الف) معادلهٔ تفاضلی همگن زیر را درنظر بگیرید:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = ۰, \qquad \text{(م۲-۵۴-۱)}$$

نشان دهید که اگر z_0 یک جواب معادلهٔ

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = ۰ \qquad \text{(م۲-۵۴-۲)}$$

باشد، آنگاه $Az_\circ^n$ یک جواب معادلهٔ (م۲-۵۴-۱) است، که در آن A ثابت دلخواهی است

(ب) در اینجا چون ساده‌تر آن است که با چند جمله‌ایهایی کـه فـقط دارای تـوانـهای نامنفی هستند، کار کنیم، معادله‌ای را که با ضرب هر دو طرف معادلهٔ (م۲-۵۴-۲) در z^N به دست می‌آید، درنظر بگیرید:

$$p(z) = \sum_{k=\circ}^{N} a_k z^{N-k} = \circ. \qquad (\text{م۲-۵۴-۳})$$

چند جمله‌ای $p(z)$ را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد:

$$p(z) = a_\circ(z-z_1)^{\sigma_1}\ldots(z-z_r)^{\sigma_r},$$

که در آن z_1، ... ، z_r ریشه‌های متمایز $p(z)$ هستند.

نشان دهید که اگر $y[n] = nz^{n-1}$ باشد، آنگاه :

$$\sum_{k=\circ}^{N} a_k y[n-k] = \frac{dp(z)}{dz} z^{n-N} + (n-N)p(z) z^{n-N-1}.$$

از این واقعیت استفاده کرده و نشان دهید که اگر $\sigma_i = 2$ باشد، آنگاه هم Az_i^n وهم Bnz_i^{n-1} جوابهای معادلهٔ (۲-۵۴-۱) هستند، که در آنها A و B ثابتهای مختلط دلخواهی می‌باشند. به طورکلی‌تر، می‌توان از همین روش استفاده کرده و نشان داد که اگر $\sigma_i > 1$ باشد، آنگاه:

$$A\, \frac{n!}{r!(n-r)!}\, z^{n-r}$$

برای $r = \circ, 1, \ldots, \sigma_i - 1$ یک جواب معادلهٔ (م۲-۵۴-۱) است.[۷]

(پ) معادلات تفاضلی همگن زیر را، باشرایط کمکی مشخص شده، حل کنید:

(۱) $y[n] + \frac{3}{4} y[n-1] + \frac{1}{8} y[n-2] = \circ;\ \ y[\circ] = 1,\ \ y[-1] = -6$

(۲) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = \circ;\ \ y[\circ] = 1,\ \ y[1] = \circ$

(۳) $y[n] - 2y[n-1] + y[n-2] = \circ;\ \ y[\circ] = 1,\ \ y[10] = 21$

(۴) $y[n] - \frac{\sqrt{2}}{2} y[n-1] + \frac{1}{4} y[n-2] = \circ;\ \ y[\circ] = \circ,\ \ y[-1] = 1$

۲-۵۵ در متن کتاب، برای حل معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت روشـی مـطرح شـد و یک روش دیگر برای حل آن نیز در مسألهٔ ۲ - ۳۰ تشریح گردید. اگر فرض سکون اولیه برقرار باشد به طوری

---

[۷] در اینجا از نماد فاکتوریل استفاده کرده‌ایم ـــ یعنی، $k! = k(k-1)(k-2)\ldots(2)(1)$، که در آن $\circ!$ برابر یک تعریف می‌شود.

که سیستم توصیف شده با معادلهٔ تفاضلی LTI و علّی باشد، آنگاه، علی‌الاصول، پاسخ ضربهٔ واحد $h[n]$ را می‌توان با هر کدام از این روشها تعیین کرد. در فصل ۵، روش دیگری را مطرح می‌کنیم که به ما امکان می‌دهد تا $h[n]$ را به طریق ظریفتری تعیین کنیم. در این مسأله بازهم یک روش دیگر را مطرح می‌کنیم که اساساً نشان می‌دهد که $h[n]$ را می‌توان به وسیلهٔ حل معادلهٔ همگن با شرایط اولیهٔ مناسب تعیین کرد.

(الف) سیستمی را درنظر بگیرید که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلهٔ زیر توصیف می‌شود:

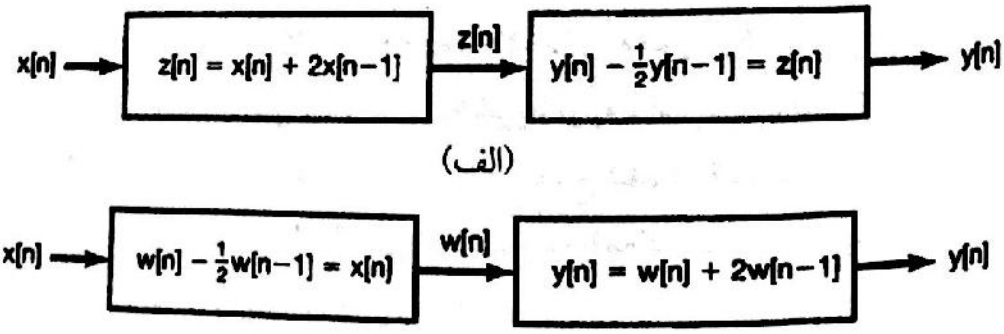
$$y[n] - \frac{۱}{۲}y[n-۱] = x[n]. \qquad (م۲-۵۵-۱)$$

با فرض $x[n] = \delta[n]$ ، $y[۰]$ برابر چیست؟ برای $n \geq ۱$ ، $h[n]$ در چه معادله‌ای صدق می‌کند و با کدام شرط کمکی؟ این معادله را حل کرده و برای $h[n]$ عبارتی به صورت بسته به دست آوردید.

(ب) اکنون سیستمی LTI را در نظر بگیرید که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$y[n] - \frac{۱}{۲}y[n-۱] = x[n] + ۲x[n-۱]. \qquad (م۲-۵۵-۲)$$

این سیستم در شکل م۲-۵۵ (الف) به صورت اتصال متوالی دو سیستم LTI که در سکون اولیه هستند، نشان داده شده است. بنا به خواص سیستم‌های LTI، به منظور به دست آوردن نمایشی دیگر از همان سیستم کلی، همان‌طور که در شکل م۲-۵۵ (ب) تصویر شده است، می‌توان ترتیب سیستم‌های متوالی شده را تعویض کرد. با توجه به این واقعیت، از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و پاسخ ضربهٔ سیستم توصیف شده با معادلهٔ (م۲-۵۵-۲) را تعیین کنید.



(الف)

(ب)

شکل م۲-۵۵

(پ) بار دیگر سیستم قسمت (الف) را در نظر بگیرید که $h[n]$ نشان دهندهٔ پاسخ ضربهٔ آن است. با تحقیق این که معادلهٔ (م۲-۵۵-۳) در معادلهٔ تفاضلی (م۲-۵۵-۱) صدق می‌کند، نشان

دهید که پاسخ $y[n]$ به یک ورودی دلخواه $x[n]$ در واقع با جمع کانولوشن داده می‌شود:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[n-m]x[m]. \qquad (\text{م}۲-۵۵-۳)$$

(ت) سیستمی LTI را درنظر بگیرید که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = x[n]. \qquad (\text{م}۲-۵۵-۴)$$

با فرض آن‌که $a_0 \neq 0$ است، اگر $x[n] = \delta[n]$ باشد، $y[0]$ برابر چیست؟ با استفاده از این نتیجه، معادلهٔ همگن و شرایط اولیه‌ای را که پاسخ ضربهٔ سیستم باید در آن صدق کند، مشخص نمایید.

اکنون یک سیستم LTI علّی را در نظر بگیرید که با معادلهٔ تفاضلی زیر توصیف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]. \qquad (\text{م}۲-۵۵-۵)$$

پاسخ ضربهٔ این سیستم را برحسب پاسخ ضربهٔ سیستم توصیف شده با معادلهٔ (م۲-۵۵-۴) بیان کنید.

(ث) برای تعیین پاسخ ضربهٔ سیستم LTI توصیف شده با معادلهٔ (م۲-۵۵-۵) روش دیگری نیز وجود دارد. مشخصاً، با فرض شرط سکون اولیه، که در این حالت یعنی $y[-N] = y[-N+1] = \ldots = y[-1] = 0$، برای $x[n]=\delta[n]$، به منظور تعیین $y[0]$، ...، $y[M]$ معادلهٔ (م۲-۵۵-۵) را به طور بازگشتی حل کنید. برای $n \geq M$، $h[n]$ در چه معادله‌ای صدق می‌کند؟ شرایط اولیهٔ مناسب این معادله کدامند؟

(ج) با استفاده از هر یک از روشهای مطرح شده در قسمتهای (ت) و (ث)، پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTI علّی توصیف شده با معادلات زیر را بیابید:

(۱) $y[n]-y[n-2]=x[n]$

(۲) $y[n]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]$

(۳) $y[n]-y[n-2]=2x[n]-3x[n-4]$

(۴) $y[n]-(\sqrt{3}/2)y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]=x[n]$

۲-۵۶ در این مسأله، روندی را که همتای زمان- پیوستهٔ روش مطرح شده در مسألهٔ ۲-۵۵ است، درنظر می‌گیریم. بار دیگر خواهیم دید که مسألهٔ تعیین پاسخ ضربه $h(t)$ به ازای $t>0$ برای یک سیستم

LTI که در حالت سکون اولیه بوده و با یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف می‌شود، به مسألهٔ حل معادلهٔ همگن با شرایط اولیهٔ مناسب تقلیل می‌یابد.

(الف) یک سیستم LTI را درنظر بگیرید که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = x(t). \qquad \text{(م۲-۵۶-۱)}$$

فرض کنید که $x(t) = \delta(t)$ است. به منظور تعیین مقدار $y(t)$ بلافاصله پس از اعمال ضربهٔ واحد، از طرفین معادلهٔ (م۲-۵۶-۱) از $t = ۰^-$ تا $t = ۰^+$ انتگرال می‌گیریم (یعنی، "درست قبل از" اعمال ضربه تا "درست پس از "اعمال آن). این کار نتیجه می‌دهد:

$$y(۰^+) - y(۰^-) + ۲\int_{۰^-}^{۰^+} y(\tau)\, d\tau = \int_{۰^-}^{۰^+} \delta(\tau)\, d\tau = ۱ \qquad \text{(م۲-۵۶-۲)}$$

چون سیستم درحالت سکون اولیه است و برای $t < ۰$ ، $x(t) = ۰$ است، در نتیجه $y(۰^-) = ۰$ خواهد بود. برای برقراری معادلهٔ (م۲-۵۶-۲) باید داشته باشیم $y(۰^+) = ۱$. بنابراین ، چون برای $t > ۰$ ، $x(t) = ۰$ است، پاسخ ضربهٔ این سیستم، جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن زیر:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = ۰$$

با شرط اولیهٔ

$$y(۰^+) = ۱$$

است. برای به دست آوردن پاسخ ضربه $h(t)$ این سیستم، این معادلهٔ دیفرانسیل را حل کنید. نتیجهٔ خود را با نشان دادن این که

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

برای هر ورودی $x(t)$ در معادلهٔ (م۲-۵۶-۱) صدق می‌کند، امتحان کنید.

(ب) برای تعمیم استدلال پیشین، یک سیستم LTI را درنظر بگیرید که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\sum_{k=۰}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t), \qquad \text{(م۲-۵۶-۳)}$$

با $x(t) = \delta(t)$. شرط سکون اولیه را فرض بگیرید، که چون برای $t < ۰$ ، $x(t) = ۰$ است، متضمن این است که:

$$y(۰^-) = \frac{dy}{dt}(۰^-) = \dots = \frac{d^{N-۱}y}{dt^{N-۱}}(۰^-) = ۰. \qquad \text{(م۲-۵۶-۴)}$$

از هر دو طرف معادلهٔ (م۲-۵۶-۳) از $t = ۰^-$ تا $t = ۰^+$ یک بار انتگرال بگیرید، و از معادلهٔ

(م۲-۵۶-۴) به همراه استدلالی مشابه با آن چه که در قسمت (الف) به کار برده شد، استفاده کرده و نشان دهید که معادلهٔ حاصل در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$y(0^+) = \frac{dy}{dt}(0^+) = \dots = \frac{d^{N-2}}{dt^{N-2}}(0^+) = 0. \quad \text{(م۲-۵۶-۵ الف)}$$

و

$$\frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0^+) = \frac{1}{a_N}. \quad \text{(م۲-۵۶-۵ ب)}$$

در نتیجه ، پاسخ ضربهٔ سیستم را برای $t > 0$ می‌توان با حل معادلهٔ همگن

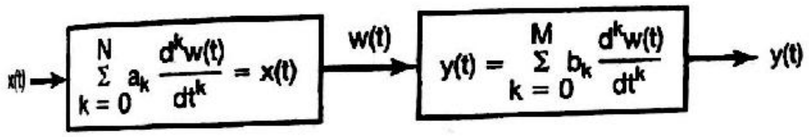
$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

به همراه شرایط اولیهٔ داده شده در معادلات (م۲-۵۶-۵) به دست آورد.

(پ) اکنون سیستم LTI علّی را درنظر بگیرید که با معادلهٔ دیفرانسیل زیر توصیف می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \text{(م۲-۵۶-۶)}$$

پاسخ ضربهٔ این سیستم را برحسب پاسخ ضربهٔ سیستم قسمت (ب) بیان کنید. (راهنمایی: شکل م۲-۵۶ را بررسی کنید.)



شکل م۲-۵۶

(ت) روشهای مطرح شده در قسمتهای (ب) و (پ) را به کار برده و پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTIیی را که در حالت سکون اولیه بوده و با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شوند، بیابید:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (1)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \quad (2)$$

(ث) از نتایج قسمتهای (ب) و (پ) استفاده کرده و نتیجه بگیرید که اگر در معادلهٔ (م۲-۵۶-۶) $M \geq N$ باشد، آنگاه پاسخ ضربه $h(t)$ شامل توابع ویژه‌ای متمرکز در $t=0$ خواهد بود. به‌خصوص ، $h(t)$ شامل جمله‌ای به صورت زیر خواهد بود:

$$\sum_{r=0}^{M-N} a_r u_r(t),$$

که در آن a_r ثابتها و $u_r(t)$ توابع ویژه هستند که در بخش ۲-۵ تعریف شدند.

(ج) پاسخهای ضربهٔ سیستم‌های LTI علّی‌ای را که با معادلات دیفرانسیل زیر توصیف می‌شوند، بیابید:

$$(۱)\quad \frac{dy(t)}{dt} + ۲y(t) = ۳\frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

$$(۲)\quad \frac{d^۲y(t)}{dt^۲} + ۵\frac{dy(t)}{dt} + ۶y(t) = \frac{d^۳x(t)}{dt^۳} + ۲\frac{d^۲x(t)}{dt^۲} + ۴\frac{dx(t)}{dt} + ۳x(t)$$

۲-۵۷ سیستم LTI و علّی S را درنظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادلهٔ تفاضلی زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$y[n] = -ay[n-۱] + b_۰x[n] + b_۱x[n-۱].$$

(الف) تحقیق کنیدکه S را می‌توان به صورت اتصال متوالی دو سیستم LTI علّی $S_۱$ و $S_۲$ با روابط ورودی-خروجی زیر در نظر گرفت:

$$S_۱ : y_۱[n] = b_۰x_۱[n] + b_۱x_۱[n-۱],$$
$$S_۲ : y_۲[n] = -ay_۲[n-۱] + x_۲[n].$$

(ب) نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ را رسم کنید.

(پ) نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ را رسم کنید.

(ت) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ رسم کنید.

(ث) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ رسم کنید.

(ج) نشان دهید که دوعنصر تأخیر واحد در نمایش دیاگرام بلوکی S به دست آمده درقسمت (ث) را می‌توان به یک عنصر تأخیر واحد تقلیل داد. دیاگرام‌های بلوکی حاصل را تحقق صورت مستقیم II از S می‌نامند، در حالی‌که دیاگرام‌های بدست آمده در قسمتهای (ت) و (ث) را تحققهای صورت مستقیم I از S می‌نامند.

۲-۵۸ سیستم LTI و علّی S را در نظر بگیرید که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن با معادلهٔ تفاضلی زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$۲y[n] - y[n-۱] + y[n-۳] = x[n] - ۵x[n-۴].$$

(الف) تحقیق کنید که S را می‌توان به صورت اتصال متوالی دو سیستم LTI علّی $S_۱$ و $S_۲$ با روابط ورودی-خروجی زیر در نظر گرفت:

$$S_1 : 2y_1[n] = x_1[n] - 5x_1[n-4],$$

$$S_2 : y_2[n] = \frac{1}{2}y_2[n-1] - \frac{1}{2}y_2[n-3] + x_2[n].$$

(ب) نمایش دیاگرام بلوکی S_1 را رسم کنید.

(پ) نمایش دیاگرام بلوکی S_2 را رسم کنید.

(ت) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی S_1 و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی S_2 رسم کنید.

(ث) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی S_2 و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی S_1 رسم کنید.

(ج) نشان دهید که چهار عنصر تأخیر واحد در نمایش دیاگرام بلوکی S به دست آمده در قسمت (ث) را می‌توان به سه‌تا تقلیل داد. دیاگرام بلوکی حاصل را تحقق صورت مستقیم II از S می‌نامند، در حالی که دیاگرام‌های بلوکی به دست آمده در قسمتهای (ت) و (ث) را تحققهای صورت مستقیم I از S می‌نامند.

۲-۵۹ سیستم LTI و علّی S را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt}.$$

(الف) نشان دهید که:

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau + Bx(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau,$$

و ثابتهای A، B، و C را برحسب ثابتهای a_0، a_1، b_0، و b_1 بیان کنید.

(ب) نشان دهید که S را می‌توان به صورت اتصال متوالی دو سیستم LTI علّی زیر درنظر گرفت:

$$S_1 : y_1(t) = Bx_1(t) + C\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau,$$

$$S_2 : y_2(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_2(\tau)\,d\tau + x_2(t).$$

(پ) نمایش دیاگرام بلوکی S_1 را رسم کنید.

(ت) نمایش دیاگرام بلوکی S_2 را رسم کنید.

(ث) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی S_1 و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی S_2 رسم کنید.

(ج) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی S_2 و به دنبال آن

نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ رسم کنید.

(چ) نشان دهید که دو انتگرال‌گیر در جواب قسمت (ج) را می‌توان به یک انتگرال‌گیر تقلیل داد. دیاگرام بلوکی حاصل را تحقق صورت مستقیم II از S می‌نامند، در حالی که دیاگرام‌های بلوکی به دست آمده در قسمتهای (ث) و (ج) را تحقق صورت مستقیم I از S می‌نامند.

۲-۶۰ سیستم LTI و علّی S را در نظر بگیرید که ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ آن با معادلهٔ دیفرانسیل زیر به هم مرتبط می‌شوند:

$$a_۲ \frac{d^۲y(t)}{dt^۲} + a_۱ \frac{dy(t)}{dt} + a_۰ y(t) = b_۰ x(t) + b_۱ \frac{dx(t)}{dt} + b_۲ \frac{d^۲x(t)}{dt^۲}.$$

(الف) نشان دهید که:

$$y(t) = A\int_{-\infty}^{t} y(\tau)\,d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau$$

$$+ Cx(t) + D\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

و ثابتهای A، B C، D، و E را برحسب ثابتهای $a_۰$، $a_۱$، $a_۲$، $b_۰$، $b_۱$، و $b_۲$ بیان کنید.

(ب) نشان دهید که S را می‌توان به صورت اتصال متوالی دو سیستم LTI علّی زیر درنظر گرفت:

$$S_۱ : y_۱(t) = Cx_۱(t) + D\int_{-\infty}^{t} x_۱(\tau)\,d\tau + E\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} x_۱(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau,$$

$$S_۲ : y_۲(t) = A\int_{-\infty}^{t} y_۲(\tau)\,d\tau + B\int_{-\infty}^{t}\left(\int_{-\infty}^{\tau} y_۲(\sigma)\,d\sigma\right)d\tau + x_۲(t).$$

(پ) نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ را رسم کنید.

(ت) نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ را رسم کنید.

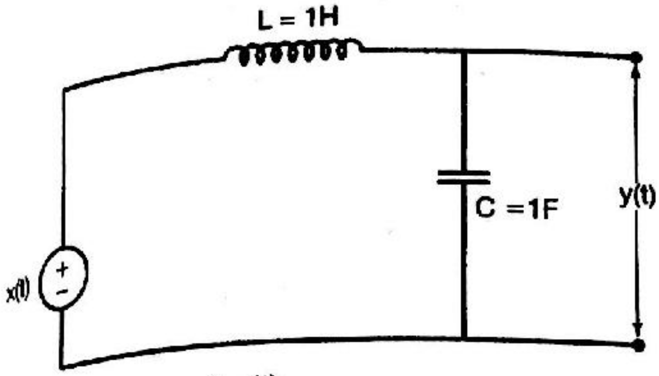
(ث) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ رسم کنید.

(ج) نمایش دیاگرام بلوکی S را به صورت اتصال متوالی نمایش دیاگرام بلوکی $S_۲$ و به دنبال آن نمایش دیاگرام بلوکی $S_۱$ رسم کنید.

(چ) نشان دهید که چهار انتگرال‌گیر درجواب قسمت (ج) را می‌توان به دو انتگرال‌گیر تقلیل داد. دیاگرام بلوکی حاصل را تحقق صورت مستقیم II از S می‌نامند، در حالی که دیاگرام‌های بلوکی به دست آمده در قسمتهای (ث) و (ج) را تحقق صورت مستقیم I از S می‌نامند.

مسائل تعمیمی

۶۱-۲ (الف) در مدار نشان داده شده در شکل م۲-۶۱ (الف)، $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ دو سر خازن به عنوان خروجی سیستم در نظر گرفته می‌شود.



(الف)

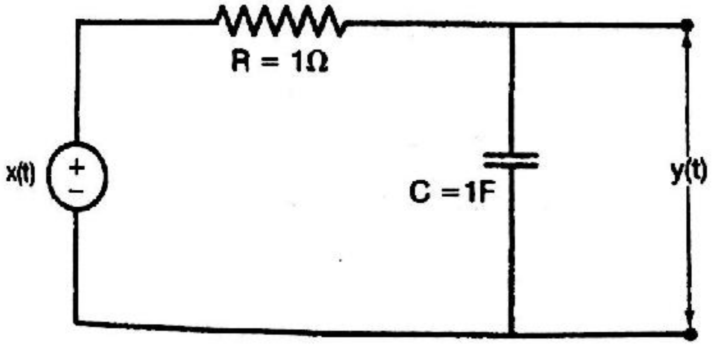
شکل م۲-۶۱الف

(۱) معادلهٔ دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

(۲) نشان دهید که جواب همگن معادلهٔ دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (۱) به صورت $K_1e^{j\omega_1 t} + K_2e^{j\omega_2 t}$ است. مقادیر ω_1 و ω_2 را مشخص کنید.

(۳) نشان دهید که، چون ولتاژ و جریان باید حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم سینوسی است.

(ب) در مدار نشان داده شده در شکل م۲-۶۱ (ب)، $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ دو سر خازن به عنوان خروجی سیستم درنظر گرفته می‌شود.



(ب)

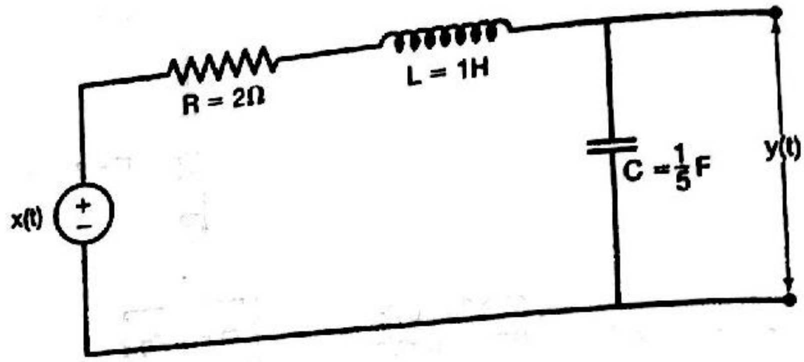
شکل م۲-۶۱ (ب)

(۱) معادلهٔ دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

(۲) نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم به صورت Ke^{-at} است، و مقدار a را مشخص کنید.

(پ) در مدار نشان داده شده در شکل م۲-۶۱ (پ)، $x(t)$ ولتاژ ورودی است. ولتاژ $y(t)$ دو سر

خازن به عنوان خروجی سیستم درنظر گرفته می‌شود.



(پ)

شکل م۲-۶۱ پ

(۱)معادلهٔ دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

(۲)نشان دهید که، جواب همگن معادلهٔ دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (۱) به صورت $e^{-at}\{K_1e^{j2t} + K_2e^{-j2t}\}$ است، و مقدار a را مشخص کنید.

(۳)نشان دهید که، چون ولتاژ و جریان باید حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم یک سینوسی میرا است.

۶۲. **(الف)** در سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل م۲-۶۲ (الف)، نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم نشان دهندهٔ ورودی است، در حالی که تغییر مکان $y(t)$ جرم نشان دهندهٔ خروجی است. معادلهٔ دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم متناوب است.

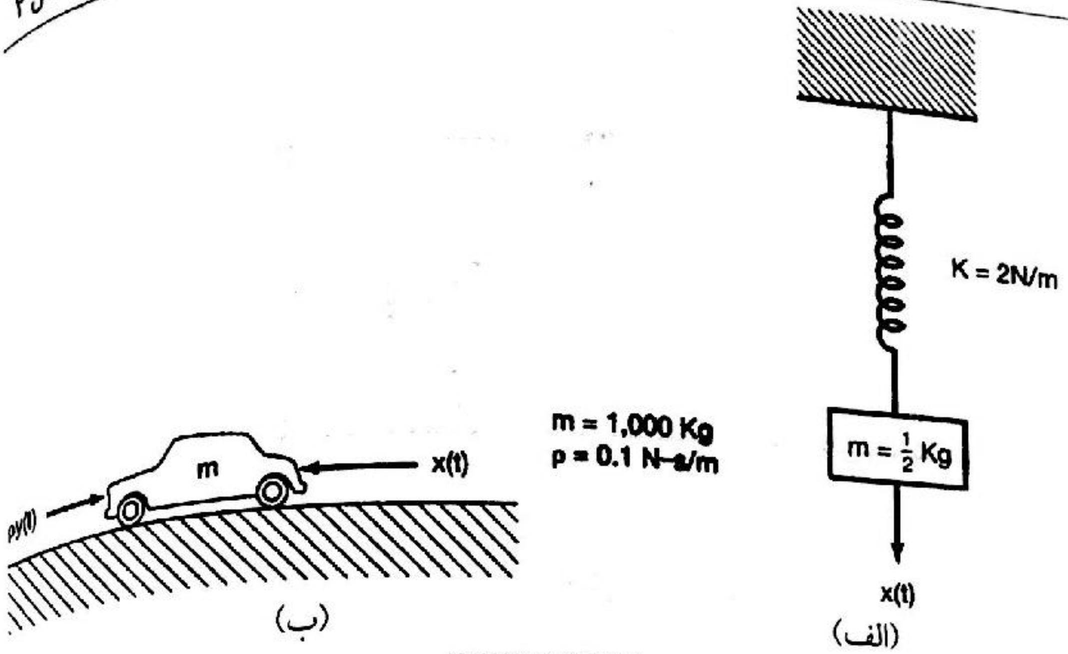
(ب) شکل م۲-۶۲ (ب) را درنظر بگیرید، که در آن نیروی $x(t)$ ورودی و سرعت $y(t)$ خروجی است. جرم اتومبیل برابر m است، در حالی که ضریب اصطکاک حرکتی برابر ρ است. نشان دهید که پاسخ طبیعی این سیستم با افزایش زمان کاهش می‌یابد.

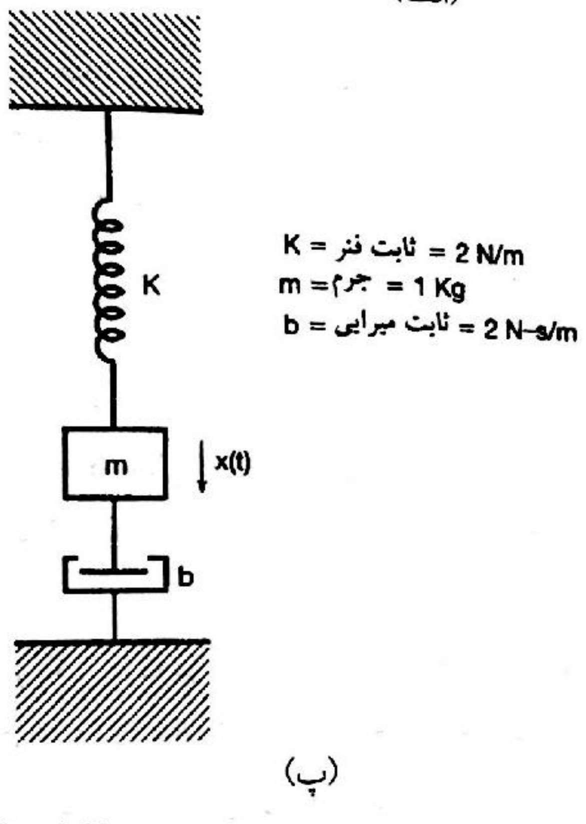
(پ) در سیستم مکانیکی نشان داده شده در شکل م۲-۶۲ (پ)، نیروی $x(t)$ اعمال شده به جرم نشان دهندهٔ ورودی است، در حالی که تغییر مکان $y(t)$ جرم نشان دهندهٔ خروجی است.

(۱)معادله دیفرانسیل ارتباط دهندهٔ $x(t)$ و $y(t)$ را تعیین کنید.

(۲)نشان دهید که جواب همگن معادله دیفرانسیل به دست آمده در قسمت (۱) به صورت $e^{-at}(K_1e^{jt} + K_2e^{-jt})$ است و مقدار a را مشخص نمایید.

(۳)نشان دهید که،چون نیرو و تغییر مکان لازم است حقیقی باشند، پاسخ طبیعی سیستم یک سینوسی میرا است.





شکل م۲-۶۲

۲-۶۳ یک وام ۱۰۰,۰۰۰ دلاری باید با قسط‌های ماهیانهٔ یکسان D دلاری مستهلک شود. بهرهٔ مرکب ماهیانه با نرخ ۱۲٪ در سال روی ماندهٔ پرداخت نشدهٔ وام در نظر گرفته می‌شود؛ به عنوان مثال، بعد از ماه اوّل، کل میزان بدهی برابر است با:

$$\$۱۰۰,۰۰۰ + \left(\frac{۰/۱۲}{۱۲}\right)\$۱۰۰,۰۰۰ = \$۱۰۱,۰۰۰.$$

مسأله، تعیین D به گونه‌ای است که بعد از یک مدت زمان مشخص، کل وام باز پرداخت شده و ماندهٔ خالص صفر شود.

(الف) برای فرموله کردن مسأله، فرض کنید $y[n]$ نشان دهندهٔ ماندهٔ پرداخت نشدهٔ وام بعد از

پرداخت قسط ماهیانهٔ n ام باشد. همچنین فرض کنید که اصل وام در ماه صفرُم قرض گرفته شده است و قسط‌های ماهیانه از ماه یکم شروع می‌شود. نشان دهید که $y[n]$ در معادلهٔ تفاضلی زیر:

$$y[n] - \gamma\, y[n-1] = -D \quad , \quad n \geq 1 \qquad (\text{م}۲-۶۳-۱)$$

با شرط اولیهٔ

$$y[0] = \$100{,}000$$

صدق می‌کند که در آن γ یک ثابت است. γ را تعیین کنید.

(ب) معادلهٔ تفاضلی قسمت (الف) را برای تعیین

$$y[n] \quad , \quad n \geq 0 \quad \text{برای}$$

حل کنید. (راهنمایی : جواب خصوصی برای معادلهٔ (م۲-۶۳-۱) برابر یک ثابت Y است. مقدار Y را پیدا کرده، و $y[n]$ را برای $n \geq 1$ به صورت مجموع جوابهای خصوصی و همگن بیان کنید. ثابت مجهول در جواب همگن را با محاسبهٔ مستقیم $y[1]$ از روی معادلهٔ (م۲-۶۳-۱) و مقایسهٔ آن با جواب خودتان، تعیین کنید.)

(پ) اگر وام باید درطی مدت ۳۰ سال با پرداخت ۳۶۰ قسط ماهیانهٔ D دلاری مستهلک شود، مقدار مناسب D را تعیین کنید.

(ت) میزان کل بازپرداخت به بانک بعد از طی مدت ۳۰ سال چقدر است؟

(ث) چرا بانکها وام می‌دهند؟

۶۴-۲ یک استفادهٔ مهم سیستمهای معکوس در مواردی است که می‌خواهیم یک نوع اعوجاجهایی را حذف کنیم. مثال خوبی در این باره، مسألهٔ حذف پژواکها از سیگنال‌های صوتی است. به عنوان مثال، اگر آمفی تئاتری دارای پژواک محسوسی باشد، آنگاه به دنبال یک ضربهٔ صوتی اولیه ، نسخه‌های تضعیف شدهٔ صدا را به فواصل یکنواخت خواهیم داشت. درنتیجه، مدلی که اغلب برای این پدیده استفاده می‌شود، یک سیستم LTI با پاسخ ضربه‌ای متشکل از قطاری ار ضربه‌ها است، یعنی:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta(t - kT). \qquad (\text{م}۲-۶۴-۱)$$

در اینجا پژواکها به فواصل T ثانیه از هم رخ می‌دهند، و h_k نشان دهندهٔ ضریب بهره روی k-اُمین پژواک ناشی از یک ضربهٔ اولیه است.

(الف) فرض کنید که $x(t)$ نشان دهندهٔ سیگنال صوتی اصلی (مثلاً موسیقی‌ای که توسط یک ارکستر نواخته می‌شود)، باشد و $y(t) = x(t) * h(t)$ سیگنال واقعی باشد که در صورت هیچگونه پردازشی برای حذف پژواکها، شنیده می‌شود. به منظور حذف اعوجاج ناشی از پژواکها، فرض کنید که از یک میکروفون برای حس کردن $y(t)$ استفاده می‌شود و سیگنال حاصل به یک سیگنال الکتریکی تبدیل می‌شود. برای نشان دادن این سیگنال نیز از $y(t)$

استفاده خواهیم کرد، چراکه نشان دهندهٔ معادل الکتریکی سیگنال صوتی است و می‌توان به وسیلهٔ سیستم‌های مبدّل صوتی-الکتریکی یکی را به دیگری تبدیل کرد.

نکتهٔ مهمی که باید متذکر شد این است که سیستم با پاسخ ضربهٔ داده شده در معادلهٔ (م۲-۶۴-۱) معکوس‌پذیر است. بنابراین، می‌توان یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $g(t)$ چنان پیدا کرد که:

$$y(t) * g(t) = x(t)$$

شود و از این رو، با پردازش سیگنال الکتریکی $y(t)$ بدین طریق و آنگاه تبدیل مجدد آن به یک سیگنال صوتی، می‌توان پژواکهای مزاحم را حذف کرد.

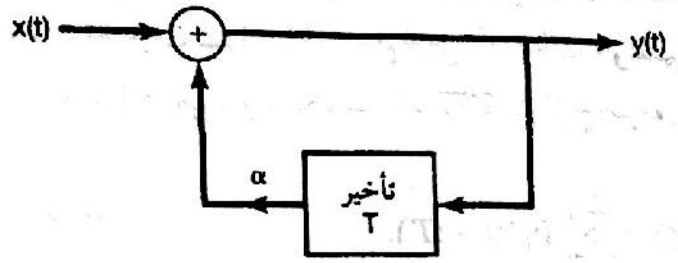
پاسخ ضربهٔ $g(t)$ موردنیاز نیز یک قطار ضربه است:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta(t-kT).$$

معادلات جبری‌ای را که g_kهای متوالی باید در آنها صدق کنند، تعیین کرده و این معادلات را نسبت به g_0، g_1 و g_2 برحسب h_k حل کنید.

(ب) فرض کنید که $h_0 = 1$ و $h_1 = \frac{1}{2}$ بوده و برای $i \geq 2$، $h_i = 0$ باشد. در این حالت $g(t)$ برابر چیست؟

(پ) در شکل م۲-۶۴ مدل خوبی برای تولید پژواکها نشان داده شده است. براساس این مدل، هر پژواک متوالی نشان دهندهٔ یک نسخهٔ پس‌خور شدهٔ $y(t)$ است، که به اندازهٔ T ثانیه تأخیر یافته و با α تغییر مقیاس می‌یابد. عموماً $0 < \alpha < 1$ است، چراکه پژواکهای متوالی تضعیف می‌شوند.



شکل م۲-۶۴

(۱) پاسخ ضربهٔ این سیستم چیست؟ (فرض کنید سکون اولیه برقرار است، یعنی اگر برای $t < 0$، $x(t) = 0$ باشد، آنگاه برای $t < 0$، $y(t) = 0$ است.)

(۲) نشان دهید که اگر $0 < \alpha < 1$ باشد، سیستم پایدار است و اگر $\alpha > 1$ باشد، سیستم ناپایدار است.

(۳) در این حالت $g(t)$ برابر چیست؟ با استفاده از جمع کننده‌ها، ضرب کننده‌ها در عدد ثابت، و عناصر تأخیر T ثانیه‌ای، تحققی را برای سیستم معکوس ترسیم کنید.

(ت) اگرچه بحث فوق، به دلیل نوع کاربردی که درنظر گرفته شد، برمبنای سیستم‌های زمان- پیوسته ارائه شد، در زمان-گسسته نیز همان ایدهٔ کلی برقرار است. یعنی، سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ

$$h[n]=\sum_{k=0}^{\infty} h_k \delta[n-kN]$$

معکوس‌پذیر است و معکوس آن یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ زیر است:

$$g[n]=\sum_{k=0}^{\infty} g_k \delta[n-kN].$$

بررسی اینکه g_i ها باید در همان معادلات جبری به دست آمده در قسمت (الف) صدق کنند، کار دشواری نیست.

اکنون سیستم LTI زمان-گسسته با پاسخ ضربهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN].$$

این سیستم معکوس پذیر نیست. دو ورودی چنان بیابید که خروجی یکسانی ایجاد کنند.

۲-۶۵ در مسألهٔ ۱-۴۵، برخی از خواص اساسی توابع همبستگی را برای سیگنال‌های زمان-پیوسته معرفی و بررسی کردیم. همتای زمان-گسستهٔ تابع همبستگی اساساً دارای همان خواص مذکور در زمان-پیوسته است، و هر دو در کاربردهای فراوانی اهمیت عمده‌ای دارند (چنان که در مسائل ۲-۶۶ و ۲-۶۷ مورد بحث قرار گرفته است). در این مسأله، تابع همبستگی زمان-گسسته را معرفی کرده و چند خاصیت دیگر آن را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $x[n]$ و $y[n]$ دوسیگنال زمان-گسسته با مقادیر حقیقی باشند. توابع خود همبستگی $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ برای $x[n]$ و $y[n]$ به ترتیب با عبارتهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]x[m]$$

و

$$\phi_{yy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]y[m],$$

و توابع همبستگی متقابل به صورت زیر داده می‌شوند:

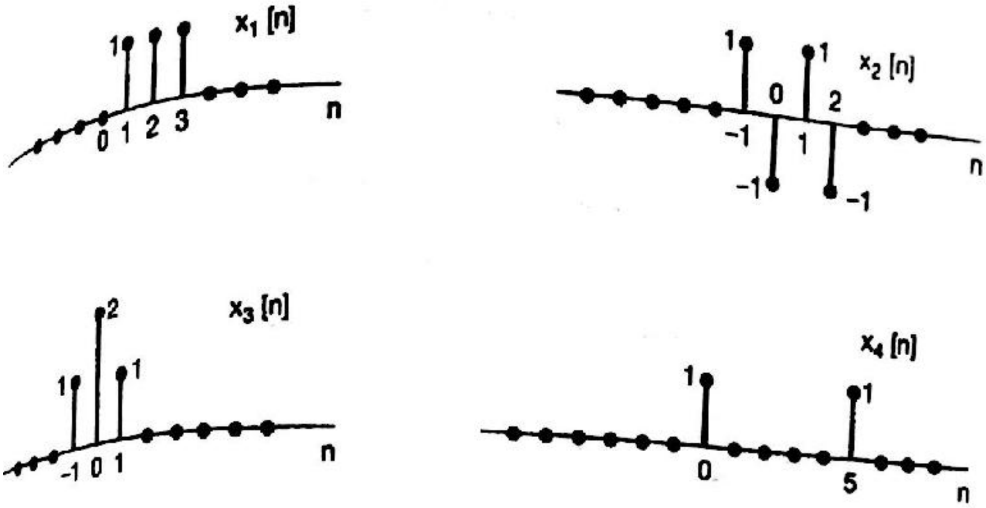
$$\phi_{xy}[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m+n]y[m]$$

و

$$\phi_{yx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} y[m+n]x[m].$$

... زمان-پیوسته، این توابع دارای پاره‌ای خواص تقارن هستند. مشخصاً، $\phi_{xx}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ توابعی زوج هستند، در حالی که $\phi_{xy}[n] = \phi_{yx}[-n]$ است.

(الف) برای سیگنال‌های $x_1[n]$ ، $x_2[n]$ ، $x_3[n]$ ، و $x_4[n]$ که در شکل م۲-۶۵ نشان داده شده‌اند، دنباله‌های خود همبستگی را محاسبه کنید.



شکل م۲-۶۵

(ب) دنباله‌های همبستگی متقابل

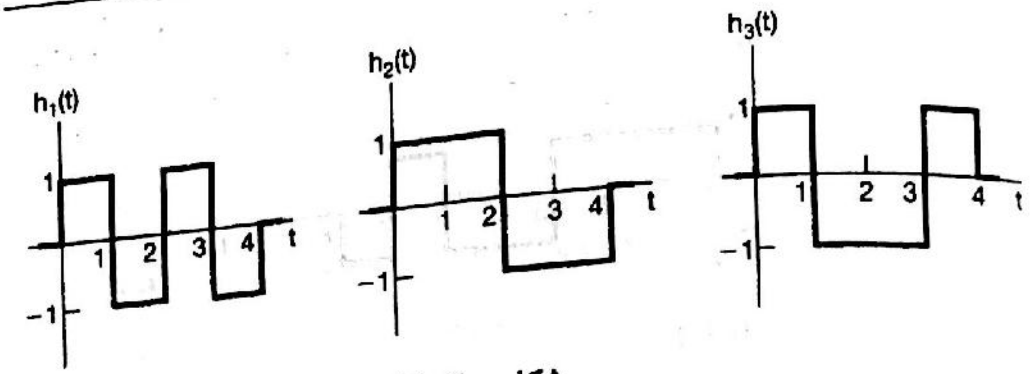
$$\phi_{x_i x_j}[n], \ i \neq j, \quad i,j = 1,2,3,4$$

را برای $x_i[n]$ ، و $i = 1,2,3,4$ ، که در شکل م۲-۶۵ نشان داده شده‌اند، محاسبه کنید.

(پ) فرض کنید $x[n]$ ورودی یک سیستم LTI با پاسخ نمونهٔ واحد $h[n]$ بوده، و فرض کنید خروجی متناظر $y(t)$ باشد. عبارتهایی را برای $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ برحسب $\phi_{xx}[n]$ و $h[n]$ بیابید. نشان دهید که چگونه می‌توان $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را بـه صورت خروجی سیستم‌های LTI با ورودی $\phi_{xx}[n]$ درنظر گرفت. (این کار را با مشخص کردن صریح پاسخ نمونهٔ هر دو سیستم انجام دهید.)

(ت) فرض کنید در شکل م۲-۶۵، $h[n] = x_1[n]$ باشد، و گیریم که $y[n]$ خروجی سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h[n]$ است وقتی که ورودی $x[n]$ نیز برابر $x_1[n]$ باشد. با استفاده از نتایج قسمت (پ)، $\phi_{xy}[n]$ و $\phi_{yy}[n]$ را محاسبه کنید.

۲-۶۶ فرض کنید $h_1(t)$ ، $h_2(t)$ ، و $h_3(t)$ ، چنان که در شکل م۲-۶۶ ترسیم شده‌اند، پاسخهای ضربهٔ سه سیستم LTI باشند. این سه سیگنال به عنوان توابع *Walsh* شناخته می‌شوند و از اهمیت عملی بسیاری برخوردارند، چرا که آنها را با استفاده از مدارهای منطقی دیجیتال می‌توان به سادگی تولید کرد و نیز این که عمل ضرب در هر کدام از آنها را می‌توان به طریق ساده‌ای با استفاده از کلید معکوس کنندهٔ پلاریته پیاده سازی کرد.



شکل م۲-۶۶

(الف) یک سیگنال زمان- پیوستهٔ $x_۱(t)$ را با خواص زیر تعیین کرده و رسم کنید:

(۱) $x_۱(t)$ حقیقی است.

(۲) برای $t < ۰$ ، $x_۱(t) = ۰$ است.

(۳) برای $t \geq ۰$ ، $|x_۱(t)| \leq ۱$ است.

(۴) $y_۱(t) = x_۱(t) * h(t)$ در $t = ۴$ تا حد ممکن بزرگ باشد.

(ب) قسمت (الف) را برای $x_۲(t)$ و $x_۳(t)$ تکرار کنید به طوری که $y_۲(t) = x_۲(t) * h_۲(t)$ و $y_۳(t) = x_۳(t) * h_۳(t)$ هر کدام در $t = ۴$ تا حد ممکن بزرگ باشند.

(پ) مقدار

$$y_{ij}(t) = x_i(t) * h_j(t) \quad , \quad i \neq j$$

در زمان $t = ۴$ برای $i,j = ۱,۲,۳$ برابر چیست؟

سیستم با پاسخ ضربهٔ $h_i(t)$ به عنوان فیلتر تطبیق شده برای سیگنال $x_i(t)$ شناخته می‌شود زیرا پاسخ ضربه برای ایجاد خروجی ماکزیمم بر روی $x_i(t)$ تنظیم شده است. در مسألهٔ بعدی، مفهوم فیلتر تطبیق شده را به مفهوم تابع همبستگی سیگنال‌های زمان- پیوسته مرتبط می‌سازیم.

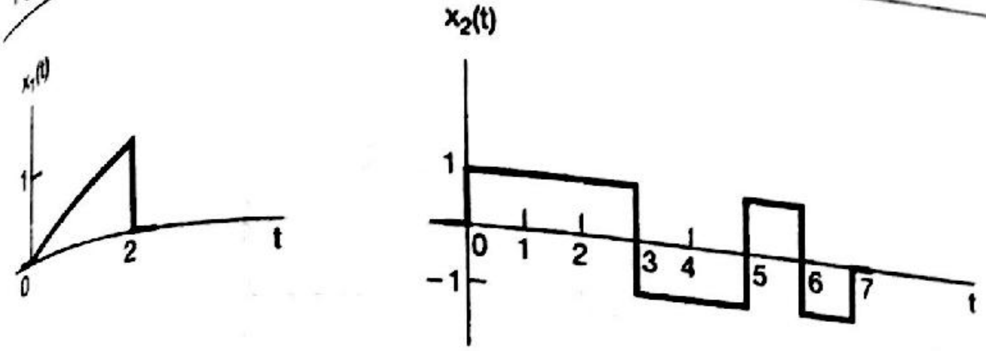
۶۷-۲ تابع همبستگی متقابل بین دوسیگنال حقیقی زمان- پیوستهٔ $x(t)$ و $y(t)$ به صورت زیر است:

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)y(\tau)\,d\tau. \qquad \text{(م۲-۶۷-۱)}$$

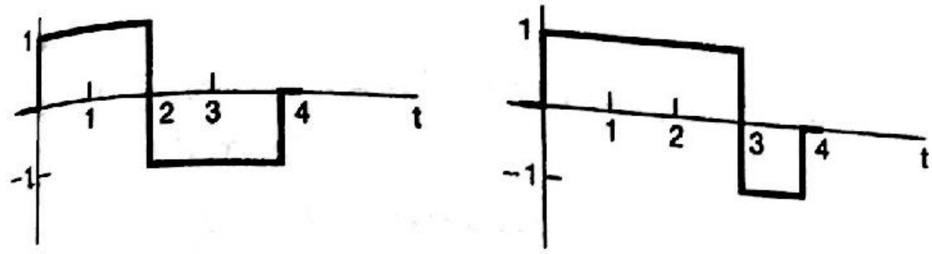
تابع خود همبستگی سیگنال $x(t)$ با قرار دادن $y(t) = x(t)$ در معادلهٔ (م۲-۶۷-۱) به دست می‌آید:

$$\phi_{xx}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

(الف) برای هر یک از دو سیگنال $x_۱(t)$ و $x_۲(t)$ نشان داده شده در شکل م۲-۶۷ (الف) تابع خود همبستگی را محاسبه کنید.



(الف)



(ب)

شکل م۲-۶۷

(ب) گیریم که $x(t)$ سیگنال مفروضی باشد، و فرض کنید که $x(t)$ دارای مدت زمان محدود است ـــ یعنی اینکه برای $t < 0$ و $t > T$، $x(t) = 0$ است. پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI را چنان تعیین کنید که اگر ورودی آن $x(t)$ باشد، خروجی آن $\phi_{xx}(t-T)$ باشد.

(پ) سیستم تعیین شده در قسمت (ب) یک **فیلتر تطبیق شده** برای سیگنال $x(t)$ است. این مطلب راکه این تعریف برای فیلتر تطبیق شده مشابه همان تعریفی است که در مسألهٔ ۲-۶۶ ارائه شد، می‌توان به شرح زیر ملاحظه کرد:

فرض کنید $x(t)$ همانند قسمت (ب) بوده و فرض کنید که $y(t)$ نشان دهندهٔ پاسخ یک سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ حقیقی $h(t)$ به ورودی $x(t)$ باشد. فرض کنید که برای $t < 0$ و برای $t > T$، $h(t) = 0$ است. نشان دهید که انتخابی برای $h(t)$ که $y(T)$ را ماکزیمم می‌کند، تحت این محدودیت که

$$\int_0^T h^2(t)\,dt = M, \quad \text{یک عدد مثبت ثابت} \qquad (\text{م}۲-۶۷-۲)$$

باشد، مضرب اسکالری از پاسخ ضربهٔ تعیین شده در قسمت (ب) است. [راهنمایی: نامساوی شوارتز چنین بیان می‌دارد که برای هر دو سیگنال دلخواه $u(t)$ و $v(t)$ داریم:

$$\int_b^a u(t)v(t)\,dt \le \left[\int_a^b u^2(t)\,dt\right]^{1/2}\left[\int_a^b v^2(t)\,dt\right]^{1/2}$$

با استفاده از این نامساوی، کرانی روی $y(T)$ به دست آورید.]

(ت) محدودیت داده شده در معادلهٔ (م۲-۶۷-۲) فقط یک تغییر مقیاس روی $h(t)$ اعمال می‌کند، به‌طوری که افزایش M صرفاً ضریب اسکالر مذکور در قسمت (پ) را تغییر می‌دهد. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که انتخاب خاص $h(t)$ در قسمتهای (ب) و (پ)، برای آن که خروجی ماکزیمم را تولید کند، با سیگنال $x(t)$ تطبیق شده است. همان‌طور که هم‌اکنون نشان داده خواهد شد، این یک خاصیت فوق‌العاده مهم در تعدادی از کاربردها است.

در مسائل مخابراتی، اغلب می‌خواهیم که یکی از چند قطعه اطلاعاتی محدود ممکن را ارسال کنیم. به عنوان مثال، اگر یک پیام پیچیده به صورت دنباله‌ای از ارقام باینری کدُ شود، می‌توان سیستمی را تصور کرد که اطلاعات را بیت به بیت ارسال می‌کند. آنگاه هر بیت را می‌توان اگر صفر بود با فرستادن یک سیگنال، مثلاً $x_0(t)$، و اگر یک بود با فرستادن سیگنال متفاوتی مثل $x_1(t)$ ارسال کرد. در این حالت، سیستم گیرندهٔ این سیگنال‌ها باید قابلیت تشخیص این را که آیا $x_0(t)$ یا $x_1(t)$ دریافت شده است، داشته باشد. به طور حسی، منطقی است که در گیرنده دوسیستم داشته باشیم که یکی روی $x_0(t)$ و دیگری روی $x_1(t)$ تنظیم شده باشد، که در اینجا منظور ما از "تنظیم" این است که سیستم بعد از این که سیگنالی که بر روی آن تنظیم شده، دریافت گردید، خروجی بزرگی بدهد. خاصیت تولید یک خروجی بزرگ وقتی که یک سیگنال خاصی دریافت شد، دقیقاً همان چیزی است که فیلتر تطبیق شده دارای آن است.

در عمل، در طی فرایندهای ارسال و دریافت، همیشه اعوجاج و تداخل وجود دارد. در نتیجه، ما می‌خواهیم که تفاوت بین پاسخ فیلتر تطبیق شده به ورودی‌ای که برآن تطبیق دارد و پاسخ فیلتر به یکی از سیگنال‌های دیگری که می‌تواند ارسال شود، ماکزیمم باشد. برای تشریح این نکته ، دوسیگنال $x_0(t)$ و $x_1(t)$ را که در شکل م ۲-۶۷ (ب) نشان داده شده‌اند، درنظر بگیرید. فرض کنید L_0 نشان دهندهٔ فیلتر تطبیق شده برای $x_0(t)$ ، و L_1 نشان دهندهٔ فیلتر تطبیق شده برای $x_1(t)$ باشد.

(۱) پاسخهای L_0 را به $x_0(t)$ و $x_1(t)$ رسم کنید. همین‌کار را برای L_1 نیز انجام دهید.

(۲) مقادیر این پاسخها را در $t = 0$ با هم مقایسه کنید. چگونه می‌توان $x_0(t)$ را به گونه‌ای تغییر داد که کار گیرنده در تشخیص بین $x_0(t)$ و $x_1(t)$ بازهم ساده‌تر شود، به‌طوری که پاسخ L_0 به $x_1(t)$ و L_1 به $x_0(t)$ هر دو در $t = 4$ صفر شوند؟

۲-۶۸ کاربرد دیگری که در آن فیلترهای تطبیق شده و توابع همبستگی نقش مهمی ایفا می‌کنند، سیستمهای رادار است. اصل زیربنایی رادار این است که یک پالس الکترومغناطیسی ارسالی به سمت هدف، به وسیلهٔ هدف منعکس شده و متعاقباً، با تأخیری متناسب با فاصله تا هدف، به

فرستنده برمی‌گردد. در حالت ایده‌آل، سیگنال دریافتی به سادگی برابر یک نسخهٔ انتقال یافته و احتمالاً تغییر مقیاس یافته از سیگنال ارسالی اولیه خواهد بود.

فرض کنید که $p(t)$ پالس اولیه‌ای باشد که ارسال می‌شود. نشان دهید که :

$$\phi_{pp}(0) = \max_t \phi_{pp}(t).$$

یعنی، $\phi_{pp}(0)$ بزرگترین مقداری است که $\phi_{pp}(t)$ به خود می‌گیرد. از این معادله استفاده کرده و نتیجه بگیرید که اگر شکل موج برگشتی به فرستنده برابر

$$x(t) = \alpha p(t-t_0)$$

باشد که در آن α یک ثابت مثبت است، آنگاه :

$$\phi_{xp}(t_0) = \max_t \phi_{xp}(t).$$

(راهنمایی: از نامساوی شوارتز استفاده کنید.)

بنابراین، روشی که سیستم‌های فاصله سنج راداری ساده برمبنای آن کار می‌کنند، مبتنی بر استفاده از یک فیلتر تطبیق شده برای شکل موج ارسالی $p(t)$ و توجه به زمانی است که در آن خروجی سیستم به حداکثر مقدار خود می‌رسد.

۲-۶۹ در بخش ۲-۵، دوبلت واحد را از طریق معادلهٔ

$$x(t) * u_1(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)u_1(\tau)\, d\tau = x'(t) \qquad \text{(م۲-۶۹-۱)}$$

به ازای هر سیگنال $x(t)$، مشخص کردیم. از روی این معادله، رابطهٔ زیر را به دست آوردیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)u_1(\tau)\, d\tau = -g'(0) \qquad \text{(م۲-۶۹-۲)}$$

(الف) با نشان دادن این‌که معادلهٔ (م۲-۶۹-۲) ، معادلهٔ (م۲-۶۹-۱) را ایجاب می‌کند، نشان دهید که معادلهٔ (م۲-۶۹-۲) یک توصیف معادل برای $u_1(t)$ است. [راهنمایی: t را ثابت گرفته و سیگنال $g(\tau) = x(t-\tau)$ را تعریف کنید.]

بنابراین، ملاحظه کردیم که توصیف ضربهٔ واحد یا دوبلت واحد با تعیین این‌که تحت کانولوشن چگونه رفتار می‌کنند، معادل است با این توصیف که وقتی در یک سیگنال دلخواه $g(t)$ ضرب می‌شوند، تحت انتگرال چگونه رفتار می‌کنند. در واقع، همان طور که در بخش ۲-۵ نشان داده شد، معادل بودن این تعاریف عملیاتی برای همهٔ سیگنال‌ها، به خصوص برای تمام توابع ویژه، برقرار است.

(ب) فرض کنید که $f(t)$ سیگنال مفروضی باشد. با نشان دادن این که هر دو تابع زیر تعاریف عملیاتی یکسانی دارند، نشان دهید که :

$$f(t)u_1(t) = f(0)u_1(t) - f'(0)\delta(t).$$

(پ) مقدار عبارت زیر:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u_2(\tau)\, d\tau$$

برابر چیست ؟ مشابه قسمت (ب) در مورد $f(t)u_1(t)$، عبارتی برای $f(t)u_2(t)$، بیابید.

۲-۷۰ مشابه با توابع ویژهٔ زمان-پیوسته، می‌توان مجموعه‌ای از سیگنال‌های زمان-گسستهٔ ویژه را تعریف کرد. مشخصاً، فرض کنید:

$$u_{-1}[n] = u[n],$$

$$u_0[n] = \delta[n],$$

و

$$u_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1],$$

و تعریف کنید:

$$u_k[n] = \underbrace{u_1[n] * u_1[n] * \dots * u_1[n]}_{k \text{ بار}}, \quad k > 0$$

و

$$u_k[n] = \underbrace{u_{-1}[n] * u_{-1}[n] * \dots * u_{-1}[n]}_{|k| \text{ بار}}, \quad k < 0.$$

توجه کنید که :

$$x[n] * \delta[n] = x[n],$$

$$x[n] * u[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m],$$

و

$$x[n] * u_1[n] = x[n] - x[n-1].$$

(الف) مقدار

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]u_1[m]$$

برابر چیست ؟

(ب) نشان دهید که :

$$x[n]u_1[n] = x[0]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n-1]$$
$$= x[1]u_1[n] - [x[1] - x[0]]\delta[n].$$

(پ) سیگنال‌های $u_2[n]$ و $u_3[n]$ را رسم کنید.

(ت) $u_{-2}[n]$ و $u_{-3}[n]$ را رسم کنید.

(ث) در حالت کلی نشان دهید که برای $k > 0$، داریم:

$$u_k[n] = \frac{(-1)^n k!}{n!(k-n)!}[u[n] - u[n-k-1]]. \qquad (\text{م}۲-۷۰-۱)$$

(راهنمایی: از استقراء استفاده کنید. از قسمت (پ) واضح است که $u_k[n]$ به ازای $k = 2$ و ۳ در معادلهٔ (م۲-۷۰-۱) صدق می‌کند. آنگاه، با فرض این که معادلهٔ (م۲-۷۰-۱) برای $u_k[n]$ صدق می‌کند، $u_{k+1}[n]$ را برحسب $u_k[n]$ نوشته و نشان دهید که معادله برای $u_{k+1}[n]$ نیز صدق می‌کند.)

(ج) در حالت کلی نشان دهید که برای $k > 0$،

$$u_{-k}[n] = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} u[n]. \qquad (\text{م}۲-۷۰-۲)$$

(راهنمایی: بار دیگر، از استقراء استفاده کنید. توجه کنید که:

$$u_{-(k+1)}[n] - u_{-(k+1)}[n-1] = u_{-k}[n]. \qquad (\text{م}۲-۷۰-۳)$$

آنگاه، با فرض این‌که معادلهٔ (م۲-۷۰-۲) برای $u_{-k}[n]$ معتبر است، از معادلهٔ (م۲-۷۰-۳) استفاده کرده و نشان دهید که معادلهٔ (م۲-۷۰-۲) برای $u_{-(k+1)}[n]$ نیز معتبر است.)

۷۱- در این فصل، از چندین خاصیت و ایده که تحلیل سیستمهای LTI را تا حد زیادی تسهیل می‌کنند، استفاده کردیم. در میان اینها، دو خاصیت هست که می‌خواهیم آنها را قدری بیشتر بررسی کنیم. چنان‌که خواهیم دید، در پاره‌ای از حالتهای خیلی خاص باید در استفاده از این خواص احتیاط به خرج داد، در صورتی که در سایر موارد بدون هیچگونه قید و شرطی برقرارند.

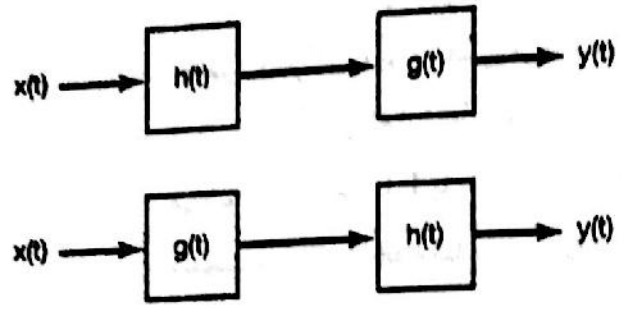
(الف) یکی از اساسی‌ترین و مهمترین خواص کانولوشن (هم در زمان‌ـ پیوسته و هم در زمان‌ـ گسسته) شرکت‌پذیری است. یعنی، اگر $x(t)$، $h(t)$ و $g(t)$ سه سیگنال باشند، آنگاه:

$$x(t) * [g(t) * h(t)] = [x(t) * g(t)] * h(t) = [x(t) * h(t)] * g(t). \qquad (\text{م}۲-۷۱-۱)$$

این رابطه مادامی که هر سه عبارت خوش تعریف و پایاندار باشند، برقرار است. از آنجایی که در عمل معمولاً چنین است، در حالت کلی از خاصیت شرکت‌پذیری بدون هیچگونه اظهار نظر خاص یا فرضی استفاده می‌کنیم. امّا، برخی از حالتها هستند که در آنها این خاصیت برقرار نیست. به عنوان مثال، سیستم نشان داده شده در شکل م۲-۷۱ را با

$h(t) = u_1(t)$ و $g(t) = u(t)$ در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم را به ورودی زیر محاسبه کنید:

$$x(t) = ۱ \text{ ,} \quad \text{برای تمام } t \text{ ها}$$



شکل م۲-۷۱

این کار را به سه طریق مختلف که با معادلهٔ (م ۲-۷۲-۱) و از شکل پیشنهاد می‌شود، انجام دهید.

(۱) ابتدا کانولوشن بین دو پاسخ ضربه را به دست آورده و سپس کانولوشن نتیجه را با $x(t)$ به دست آورید.

(۲) ابتدا کانولوشن $x(t)$ با $u_1(t)$ را به دست آورده و سپس کانولوشن نتیجه را با $x(t)$ به دست آورید.

(۳) ابتدا کانولوشن $x(t)$ با $u(t)$ را به دست آورده و سپس کانولوشن نتیجه را با $u_1(t)$ به دست آورید.

(ب) قسمت (الف) را برای

$$x(t) = e^{-t}$$

و

$$h(t) = e^{-t}u(t),$$

$$g(t) = u_1(t) + \delta(t),$$

تکرار کنید.

(پ) همین کار را برای

$$x[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n,$$

$$h[n] = \left(\frac{۱}{۲}\right)^n u[n],$$

$$g[n] = \delta[n] - \frac{۱}{۲}\delta[n-۱],$$

انجام دهید.

بنابراین، در حالت کلی ، خاصیت شرکت‌پذیری کانولوشن برقرار است اگر و فقط

اگر سه عبارت در معادلهٔ (م۲-۷۱-۱) مفهوم داشته باشند (یعنی، اگر و فقط اگر تعبیرهای آنها برحسب سیستم‌های LTI معنی‌دار باشند). به عنوان مثال، در قسمت (الف)، مشتق‌گیری از یک ثابت و سپس انتگرال‌گیری، مفهوم دارد؛ امّا فرایند انتگرال‌گیری یک ثابت از $t = -\infty$ و سپس مشتق‌گیری، مفهومی ندارد؛ و فقط در چنین حالتهایی است که خاصیت شرکت‌پذیری نقض می‌شود.

مسأله‌ای که ارتباط نزدیکی با بحث پیشین دارد، به سیستم‌های معکوس مربوط می‌شود. سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $h(t) = u(t)$ را درنظر بگیرید. همان‌طور که در قسمت (الف) ملاحظه شد، ورودیهایی وجود دارند ـــ مشخصاً، ثابت غیرصفر = $x(t)$ ـــ که برای آنها خروجی این سیستم بی‌پایان است، و بنابراین، طرح سؤال معکوس کردن چنین خروجیهایی برای بازیابی ورودی بی‌معنی است. اما، اگر خودمان را به ورودیهایی که خروجیهایی پایاندار دارند، محدود کنیم، یعنی ورودیهایی که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند

$$\left|\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau\right| < \infty, \qquad \text{(م۲-۷۱-۲)}$$

آنگاه سیستم معکوس‌پذیر است، و سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $u_1(t)$ سیستم معکوس آن است.

(ت) نشان دهید که سیستم LTI با پاسخ ضربهٔ $u_1(t)$ معکوس پذیر نیست. (راهنمایی: دو ورودی مختلف چنان بیابید که هر دو خروجی ای نتیجه دهند که برای تمام زمانها صفر است.) اما، نشان دهید که اگر خودمان را به ورودیهایی محدود کنیم که در معادلهٔ (م۲-۷۱-۲) صدق می‌کنند، آنگاه سیستم معکوس‌پذیر است. [راهنمایی: در مسألهٔ ۱-۴۴ نشان داده شد که یک سیستم LTI معکوس‌پذیر است اگر هیچ ورودی دیگری بجز $x(t) = 0$، به خروجی‌ای که برای تمام زمانها صفر است منجر نشود؛ آیا دو ورودی $x(t)$ وجود دارد که در معادلهٔ (م ۲-۷۱-۲) صدق کرده و وقتی با $u_1(t)$ کانولوشن گرفته شوند، پاسخهای متحد صفر نتیجه دهند؟]

آن‌چه که در این مسأله روشن ساختیم، عبارت است از:

(۱) اگر $x(t)$، $h(t)$، و $g(t)$ سه سیگنال باشند، و اگر $x(t) * g(t)$، $x(t) * h(t)$ و $h(t) * g(t)$ همگی خوش تعریف و پایاندار باشند، آنگاه خاصیت شرکت‌پذیری، معادلهٔ (م۲-۷۱-۱)، برقرار است.

(۲) فرض کنید که $h(t)$ پاسخ ضربهٔ یک سیستم LTI باشد، و فرض کنید که پاسخ ضربهٔ $g(t)$ برای سیستم دوّمی دارای خاصیت زیر باشد:

$$h(t) * g(t) = \delta(t) \qquad \text{(م۲-۷۱-۳)}$$

بنا به (۱)، برای تمام ورودیهای $x(t)$ای که برای آنها $x(t) * h(t)$ و $x(t) * g(t)$ هر دو خوش تعریف و پایاندار باشند، دونوع اتصال متوالی سیستمها که در شکل م۲-۷۱ نشان داده شده‌اند، به صورت سیستم همانی عمل می‌کنند، و بنابراین دو سیستم LTI را می‌توان به عنوان معکوس یکدیگر در نظر گرفت. به عنوان مثال، اگر $h(t) = u(t)$ و $g(t) = u_1(t)$ باشند، آنگاه مادامی که خود را به ورودیهایی محدود کنیم که در معادلهٔ (م۲-۷۱-۲) صدق می‌کنند، می‌توانیم این دو سیستم را به عنوان معکوس یکدیگر در نظر بگیریم.

بنابراین ملاحظه می‌شود که خاصیت شرکت‌پذیری در معادلهٔ (م۲-۷۱-۱) و تعریف معکوسهای LTI به گونه‌ای که در معادلهٔ (م۲-۷۱-۳) داده شده است، مادامی که تمام کانولوشن‌های موجود پایاندار باشند، معتبر هستند. از آنجایی که در هر مسألهٔ واقعی، مطمئناً این شرایط برقرار است، در حالت کلی از این خواص بدون هیچگونه اظهار نظر خاص یا قید و شرطی استفاده خواهیم کرد. توجه کنید که، اگرچه قسمت عمدهٔ بحث خود را برحسب سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان‌ـپیوسته بیان کردیم، همین نکات را در حالت زمان‌ـگسسته نیز می‌توان بیان کرد [همان طور که از قسمت (ب) باید واضح باشد].

۲-۷۲ فرض کنید $\delta_\Delta(t)$ نشان دهندهٔ پالس مستطیلی با ارتفاع $\frac{1}{\Delta}$ برای $0 < t \le \Delta$ باشد. تحقیق کنید که:

$$\frac{d}{dt}\delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}[\delta(t) - \delta(t-\Delta)].$$

۲-۷۳ با استقراء نشان دهید که:

$$u_{-k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}u(t), \quad k = 1, 2, 3\ldots \quad \text{برای}$$