بخش نخست از مسائل به مباحث پایه‌ای تعلق دارد و جوابهای آنها درانتهای کتاب ارائه شده است. دوبخش بعدی شامل مسائلی هستند که به ترتیب به مباحث پایه‌ای و پیشرفته تعلق دارند. در بخش آخر، **مرور ریاضی**، مسائل تمرینی دربارهٔ ایده‌های اساسی محاسبات و جبر اعداد مختلط ارائه شده است.

مسائل پایه‌ای با جواب

۱–۱ هر یک از اعداد مختلط زیر را به صورت کارتزین $(x + jy)$ بیان کنید:

$$\frac{۱}{۲}e^{j\pi},\ \frac{۱}{۲}e^{-j\pi},\ e^{j\pi/۲},\ e^{-j\pi/۲},\ e^{j۵\pi/۲},\ \sqrt{۲}e^{j\pi/۴},\ \sqrt{۲}e^{j۹\pi/۴},\ \sqrt{۲}e^{-j۹\pi/۴},\ \sqrt{۲}e^{-j\pi/۴}.$$

۱–۲ هر یک از اعداد مختلط زیر را به صورت قطبی بیان کنید ($re^{j\theta}$ ، با $-\pi < \theta \le \pi$):

$$۵,\ -۲,\ -۳j,\ \frac{۱}{۲}-j\frac{\sqrt{۳}}{۲},\ ۱+j,\ (۱-j)^۲,\ j(۱-j),\ (۱+j)/(۱-j),\ (\sqrt{۲}+j\sqrt{۲})/(۱+j\sqrt{۳}).$$

۱–۳ برای هر یک از سیگنال‌های زیر، مقادیر P_∞ و E_∞ را تعیین کنید:

(الف) $x_۱(t) = e^{-۲t}u(t)$ **(ب)** $x_۲(t) = e^{j(۲t+\pi/۴)}$ **(پ)** $x_۳(t) = \cos(t)$

(ت) $x_۱[n] = (\frac{۱}{۲})^n u[n]$ **(ث)** $x_۲[n] = e^{j(\pi/۲n+\pi/۸)}$ **(ج)** $x_۳[n] = \cos(\frac{\pi}{۴}n)$

۱–۴ فرض کنید $x[n]$ سیگنالی باشد که برای $n<-۲$ و $n>۴$، $x[n] = ۰$ است. برای هر سیگنال داده شده در زیر، مقادیری از n راکه به ازای آن سیگنال قطعاً صفر است، تعیین کنید.

(الف) $x[n-۳]$ **(ب)** $x[n+۴]$ **(پ)** $x[-n]$

(ت) $x[-n+۲]$ **(ث)** $x[-n-۲]$

۱–۵ فرض کنید $x(t)$ سیگنالی باشد که برای $t < ۳$، $x(t) = ۰$ است. برای هر سیگنال داده شده در زیر، مقادیری از t راکه به ازای آن سیگنال قطعاً صفر است، تعیین کنید.

(الف) $x(۱-t)$ **(ب)** $x(۱-t) + x(۲-t)$ **(پ)** $x(۱-t)\,x(۲-t)$

(ت) $x(۳t)$ **(ث)** $x(t/۳)$

۱–۶ تعیین کنید که آیا هریک از سیگنال‌های زیر متناوب است یا خیر:

(الف) $x_۱(t) = ۲e^{j(t+\pi/۴)}u(t)$ **(ب)** $x_۲[n] = u[n] + u[-n]$

(پ) $x_۳[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\{\delta[n-۴k] - \delta[n-۱-۴k]\}$

۱–۷ برای هر سیگنال داده شده در زیر، کلیهٔ مقادیری از متغیر مستقل راکه به ازای آن جزء زوج سیگنال قطعاً صفر است، تعیین کنید.

(الف) $x_۱[n] = u[n] - u[n-۴]$ **(ب)** $x_۲(t) = \sin(\frac{۱}{۲}t)$

(پ) $x_3[n] = (\frac{1}{2})^n u[n-3]$ (ت) $x_4(t) = e^{-5t}u(t+2)$

۱–۸ جزء حقیقی هریک از سیگنال‌های زیر را به صورت $Ae^{-at}\cos(\omega t+\phi)$ بیان کنید، که در آن A، a، ω، و ϕ اعداد حقیقی بوده و $A>0$ و $-\pi < \phi \le \pi$:

(الف) $x_1(t) = -2$ (ب) $x_2(t) = \sqrt{2}e^{j\pi/4}\cos(3t + 2\pi)$

(پ) $x_3(t) = e^{-t}\sin(3t + \pi)$ (ت) $x_4(t) = je^{(-2+j100)t}$

۱–۹ تعیین کنید که آیا هر یک از سیگنال‌های زیر متناوب است یا خیر. اگر سیگنالی متناوب است، دورهٔ تناوب اصلی آن را مشخص کنید.

(الف) $x_1(t) = je^{j10t}$ (ب) $x_2(t) = e^{(-1+j)t}$ (پ) $x_3[n] = e^{j7\pi n}$

(ت) $x_4[n] = 3e^{j3\pi(n+1/2)/5}$ (ث) $x_5[n] = 3e^{j3/5(n+1/2)}$

۱–۱۰ دورهٔ تناوب اصلی سیگنال $x(t) = 2\cos(10t + 1) - \sin(4t-1)$ را تعیین کنید.

۱–۱۱ دورهٔ تناوب اصلی سیگنال $x[n] = 1 + e^{j4\pi n/7} - e^{j2\pi n/5}$ را تعیین کنید.

۱–۱۲ سیگنال زمان ـ گسستهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$x[n] = 1 - \sum_{k=3}^{\infty} \delta[n-1-k].$$

مقادیر اعداد صحیح M و n_0 را چنان تعیین کنید که بتوان $x[n]$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$x[n] = u[Mn - n_0].$$

۱–۱۳ سیگنال زمان ـ پیوستهٔ زیر را درنظر بگیرید:

$$x(t) = \delta(t+2) - \delta(t-2).$$

مقدار E_∞ را برای سیگنال زیر محاسبه کنید:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau .$$

۱–۱۴ سیگنال متناوب

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1 \\ -2, & 0 < t < 2 \end{cases}$$

با دورهٔ تناوب $T = 2$ را درنظر بگیرید. مشتق این سیگنال به "قطار ضربهٔ" زیر:

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-2k)$$

با دورهٔ تناوب $T = ۲$ مربوط می‌شود. می‌توان نشان داد که :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_۱ g(t-t_۱) + A_۲ g(t-t_۲).$$

مقادیر $A_۱$ ، $t_۱$ ، $A_۲$ ، و $t_۲$ را تعیین کنید.

۱-۱۵ سیستم S با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را درنظر بگیرید. این سیستم از بهم پیوستن سری سیستم $S_۱$ و به دنبال آن سیستم $S_۲$ به دست آمده است. روابط ورودی-خروجی برای $S_۱$ و $S_۲$ چنین هستند:

$$S_۱ : \quad y_۱[n] = ۲x_۱[n] + ۴x_۱[n-۱],$$

$$S_۲ : \quad y_۲[n] = x_۲[n-۲] + \frac{۱}{۲} x_۲[n-۳],$$

که در آن $x_۱[n]$ و $x_۲[n]$ نشان دهندهٔ سیگنال‌های ورودی می‌باشند.

(الف) رابطهٔ ورودی-خروجی را برای سیستم S تعیین کنید.

(ب) اگر ترتیب اتصال سری $S_۱$ و $S_۲$ را عوض کنیم (یعنی، اگر $S_۱$ به دنبال $S_۲$ قرار بگیرد) آیا رابطهٔ ورودی-خروجی سیستم S تغییر می‌کند؟

۱-۱۶ سیستم زمان-گسسته‌ای با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ را درنظر بگیرید. رابطهٔ ورودی-خروجی این سیستم چنین است:

$$y[n] = x[n]\, x[n-۲].$$

(الف) آیا سیستم بی‌حافظه است ؟

(ب) به ازای ورودی $A\delta[n]$، که در آن A عددی است حقیقی یا مختلط ، خروجی سیستم را تعیین کنید.

(پ) آیا سیستم معکوس پذیر است؟

۱-۱۷ سیستم زمان- پیوسته‌ای با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ که به صورت زیر به هم مرتبط شده‌اند، درنظر بگیرید:

$$y(t) = x(\sin(t)) \;.$$

(الف) آیا این سیستم علّی است ؟

(ب) آیا این سیستم خطی است؟

۱-۱۸ سیستم زمان-گسسته‌ای با ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ که به صورت زیر به هم مرتبط شده‌اند، درنظر بگیرید:

$$y[n] = \sum_{k=n-n_۰}^{n+n_۰} x[k] \;,$$

که درآن $n_۰$ عدد صحیح مثبت معینی است .

(الف) آیا سیستم خطی است ؟

(ب) آیا سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

(پ) اگر بدانیم که $x[n]$ به عدد صحیح معین B کراندار است (یعنی، برای تمام nها $|x[n]| < B$ است)، می‌توان نشان داد که $y[n]$ به عدد معین C کراندار است. نتیجه می‌گیریم که سیستم فوق پایدار است. C را برحسب B و n بیان کنید.

۱-۱۹ برای هر یک از روابط ورودی- خروجی زیر، تعیین کنید که آیا سیستم متناظر خطی، تغییرناپذیر با زمان یا هر دو است.

(الف) $y(t) = t^۲x(t-۱)$ (ب) $y[n] = x^۲[n-۲]$

(پ) $y[n] = x[n+۱] - x[n-۱]$ (ت) $y[n] = \mathcal{O}d\{x(t)\}$

۱-۲۰ سیستم‌زمان- پیوستهٔ خطی S با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$، زوجهای ورودی- خروجی زیر را نتیجه داده است:

$$x(t) = e^{j۲t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{j۳t},$$

$$x(t) = e^{-j۲t} \xrightarrow{S} y(t) = e^{-j۳t}.$$

(الف) اگر $x_۱(t) = \cos(۲t)$ باشد، خروجی متناظر $y_۱(t)$ را برای سیستم S تعیین کنید.

(ب) اگر $x_۲(t) = \cos(۲(t - \frac{۱}{۲}))$ باشد، خروجی متناظر $y_۲(t)$ را برای سیستم S تعیین کنید.

مسائل پایه‌ای

۱-۲۱ سیگنال زمان- پیوستهٔ $x(t)$ در شکل م۱-۲۱ نشان داده شده است. هر یک از سیگنال‌های زیر را به دقت رسم کرده و مدرج کنید:

(الف) $x(t-۱)$ (ب) $x(۲-t)$ (پ) $x(۲t+۱)$

(ت) $x(۴ - \frac{t}{۲})$ (ث) $[x(t) + x(-t)]u(t)$ (ج) $x(t)[\delta(t + \frac{۳}{۲}) - \delta(t - \frac{۳}{۲})]$

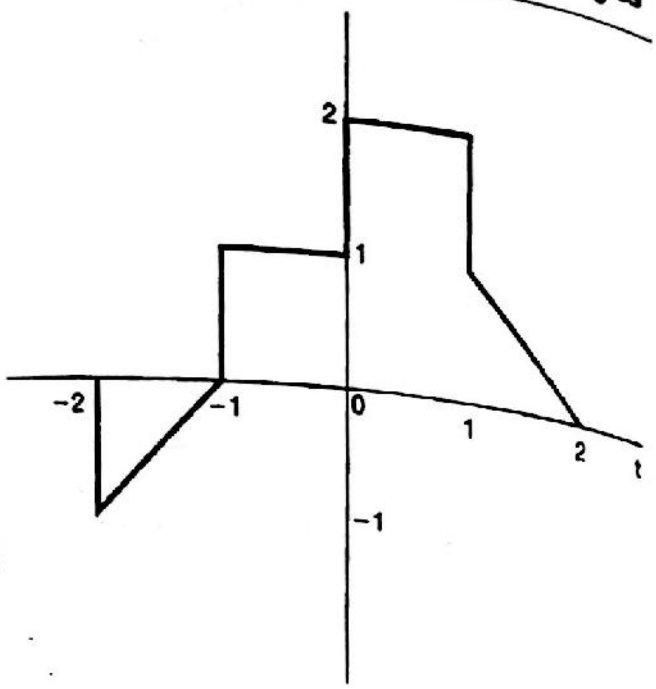
۱-۲۲ سیگنال زمان- گسسته‌ای در شکل م۱-۲۲ نشان داده شده است. هریک از سیگنال‌های زیر را به دقت رسم کرده و مدرج کنید:

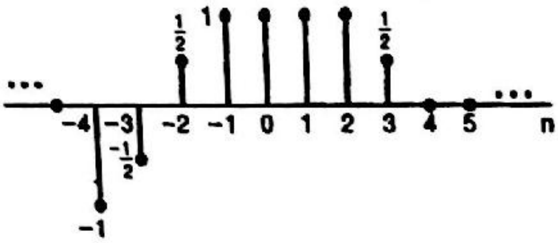
(الف) $x[n-۴]$ (ب) $x[۳-n]$ (پ) $x[۳n]$

(ت) $x[۳n+۱]$ (ث) $x[n]u[۳-n]$ (ج) $x[n-۲]\delta[n-۲]$

(چ) $\frac{۱}{۲}x[n] + \frac{۱}{۲}(-۱)^n x[n]$ (ح) $x[(n-۱)^۲]$

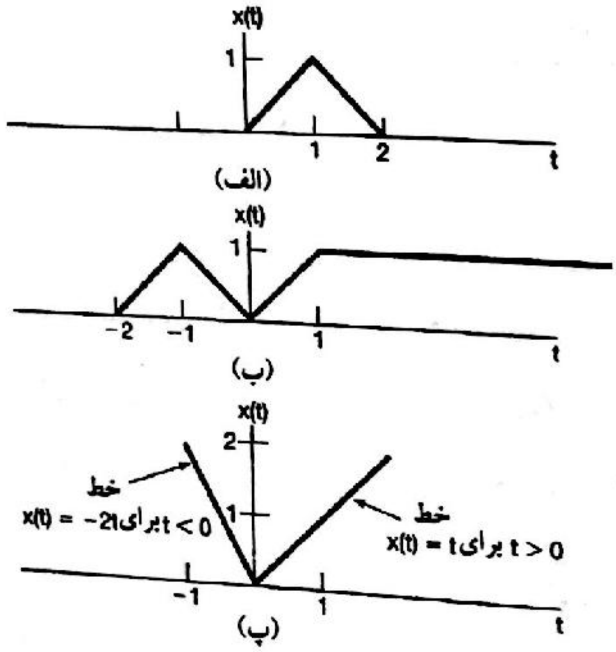
۱-۲۳ جزءهای زوج و فرد سیگنال‌های نشان داده شده در شکل م۱-۲۳ را تعیین و رسم کنید. ترسیمهای خود را به دقت مدرج کنید.





شکل م۱-۲۲

شکل م۱-۲۱



شکل م۱-۲۳

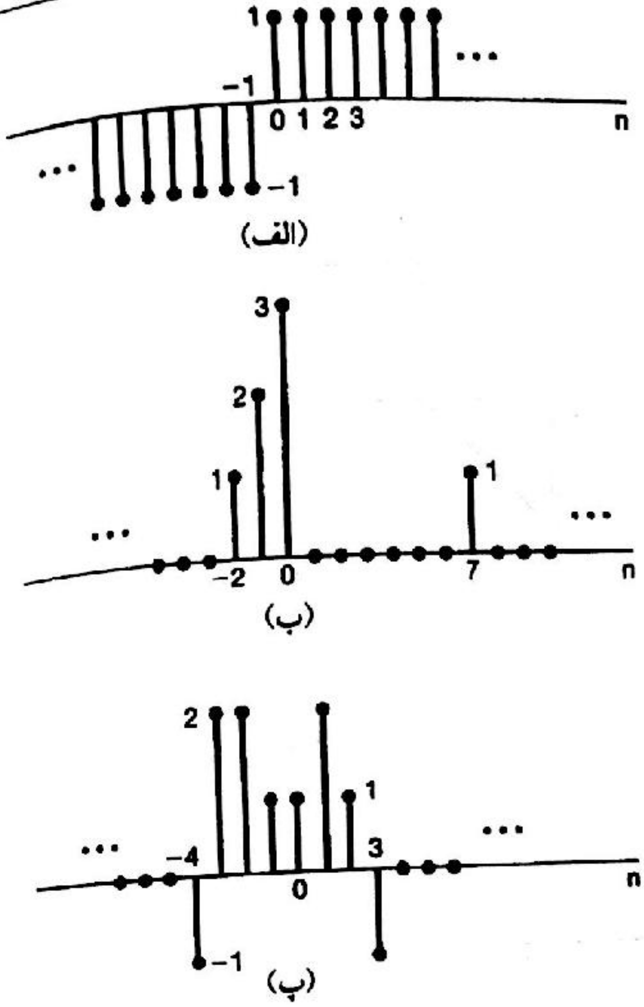
۱-۲۴ جزءهای زوج و فرد سیگنال‌های نشان داده شده در شکل م۱-۲۴ را تعیین و رسم کنید. ترسیمهای خود را به دقت مدرج کنید.

۱-۲۵ تعیین کنید که آیا هر یک از سیگنال‌های زمان- پیوستهٔ زیر متناوب است یا خیر. اگر سیگنالی متناوب است، دورهٔ تناوب اصلی آن را تعیین کنید.

(الف) $x(t) = ۳\cos(۴t + \frac{\pi}{۳})$ (ب) $x(t) = e^{j(\pi t-۱)}$

(پ) $x(t) = [\cos(۲t - \frac{\pi}{۳})]^۲$ (ت) $x(t) = \mathcal{E}v\{\cos(۴\pi t)\, u(t)\}$

(ث) $x(t) = \mathcal{E}v\{\sin(۴\pi t)u(t)\}$ (ج) $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(۲t-n)}$



شکل م۱-۲٤

۱–۲۶ تعیین کنید که آیا هر یک از سیگنال‌های زمان-گسستهٔ زیر متناوب است یا خیر. اگر سیگنالی متناوب است، دورهٔ تناوب اصلی آن را تعیین کنید.

(الف) $x[n] = \sin(\frac{۶\pi}{۷} n + ۱)$ **(ب)** $x[n] = \cos(\frac{n}{۸} - \pi)$

(پ) $x[n] = \cos(\frac{\pi}{۸} n^۲)$ **(ت)** $x[n] = \cos(\frac{\pi}{۲} n)\cos(\frac{\pi}{۴} n)$

(ث) $x[n] = ۲\cos(\frac{\pi}{۴} n) + \sin(\frac{\pi}{۸} n) - ۲\cos(\frac{\pi}{۲} n + \frac{\pi}{۶})$

۱–۲۷ در این فصل تعدادی از خواص کلی سیستم‌ها را معرفی کردیم. به خصوص، یک سیستم ممکن است که:

(۱) بی‌حافظه

(۲) تغییرناپذیر با زمان

(۳) خطی

(۴) علّی

(۵) پایدار

باشد یا نباشد. برای هریک از سیستم‌های زمان-پیوستهٔ زیر تعیین کنید که کدام یک از این خواص برقرار بوده و کدام یک برقرار نیست. پاسخهای خود را توجیه کنید. در هر مثال، $y(t)$ نشان دهندهٔ

خروجی سیستم بوده و $x(t)$ ورودی سیستم است.

(الف) $y(t) = x(t-۲) + x(۲-t)$ (ب) $y(t) = [\cos(۳t)]\, x(t)$

(پ) $y(t) = \int_{-\infty}^{۲t} x(\tau)d\tau$ (ت) $y(t) = \begin{cases} ۰, & t<۰ \\ x(t) + x(t-۲), & t\geq ۰ \end{cases}$

(ث) $y(t) = \begin{cases} ۰, & x(t)<۰ \\ x(t) + x(t-۲), & x(t)\geq ۰ \end{cases}$ (ج) $y(t) = x(t/۳)$

(چ) $y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$

۱-۲۸ برای هر یک از سیستم‌های زمان ـ گسستهٔ زیر تعیین کنید که کدام یک از خواص ذکر شده در مسألهٔ ۱-۲۷ برقرار بوده و کدام یک برقرار نیست. جوابهای خود را توجیه کنید. در هر مثال، $y[n]$ نشان دهندهٔ خروجی سیستم بوده و $x[n]$ ورودی سیستم است.

(الف) $y[n] = x[-n]$ (ب) $y[n] = x[n-۲] - ۲x[n-۸]$

(پ) $y[n] = nx[n]$ (ت) $y[n] = \mathcal{E}v\{x[n-۱]\}$

(ث) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n\geq ۱ \\ ۰, & n=۰ \\ x[n+۱], & n\leq -۱ \end{cases}$ (ج) $y[n] = \begin{cases} x[n], & n\geq ۱ \\ ۰, & n=۰ \\ x[n], & n\leq -۱ \end{cases}$

(چ) $y[n] = x[۴n+۱]$

۱-۲۹ (الف) نشان دهید که سیستم زمان‌ـ گسسته‌ای که ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ آن به‌صورت $y[n] = \mathcal{R}e\{x[n]\}$ به هم مرتبط می‌شوند، جمع‌پذیر است. اگر رابطهٔ ورودی ـ خروجی این سیستم به صورت $y[n] = \mathcal{R}e\{e^{j\pi n/۴}x[n]\}$ تغییر یابد، آیا بازهم جمع‌پذیر است؟ (در این مسأله $x[n]$ را حقیقی فرض نکنید.)

(ب) در متن کتاب، در بارهٔ این واقعیت که خاصیت خطی بودن یک سیستم معادل است با این‌که سیستم دارای هم خاصیت جمع‌پذیری و هم خاصیت همگنی باشد، بحث شد. تعیین کنید که آیا هر یک از سیستم‌های تعریف شده در زیر جمع‌پذیر و/یا همگن است. جوابهای خود را در صورت برقراری خاصیت با ارائهٔ یک اثبات و در غیراین صورت با یک مثال نقض توجیه کنید.

(۱) $y(t) = \dfrac{۱}{x(t)}\left[\dfrac{dx(t)}{dt}\right]^{۲}$ (۲) $y[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]x[n-۲]}{x[n-۱]}, & x[n-۱]\neq ۰ \\ ۰, & x[n-۱]=۰ \end{cases}$

۱-۳۰ معکوس پذیری هر یک از سیستم‌های زیر را مشخص کنید. درصورت معکوس‌پذیر بودن، سیستم معکوس را بسازید. درغیراین صورت، دوسیگنال ورودی به سیستم را چنان بیابید که دارای خروجی یکسان باشند.

(الف) $y(t) = x(t-4)$

(ب) $y(t) = \cos[x(t)]$

(پ) $y[n] = nx[n]$

(ت) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(ث) $y[n] = \begin{cases} x[n-1], & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

(ج) $y[n] = x[n]\, x[n-1]$

(چ) $y[n] = x[1-n]$

(ح) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau)d\tau$

(خ) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (\frac{1}{2})^{n-k} x[k]$

(د) $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

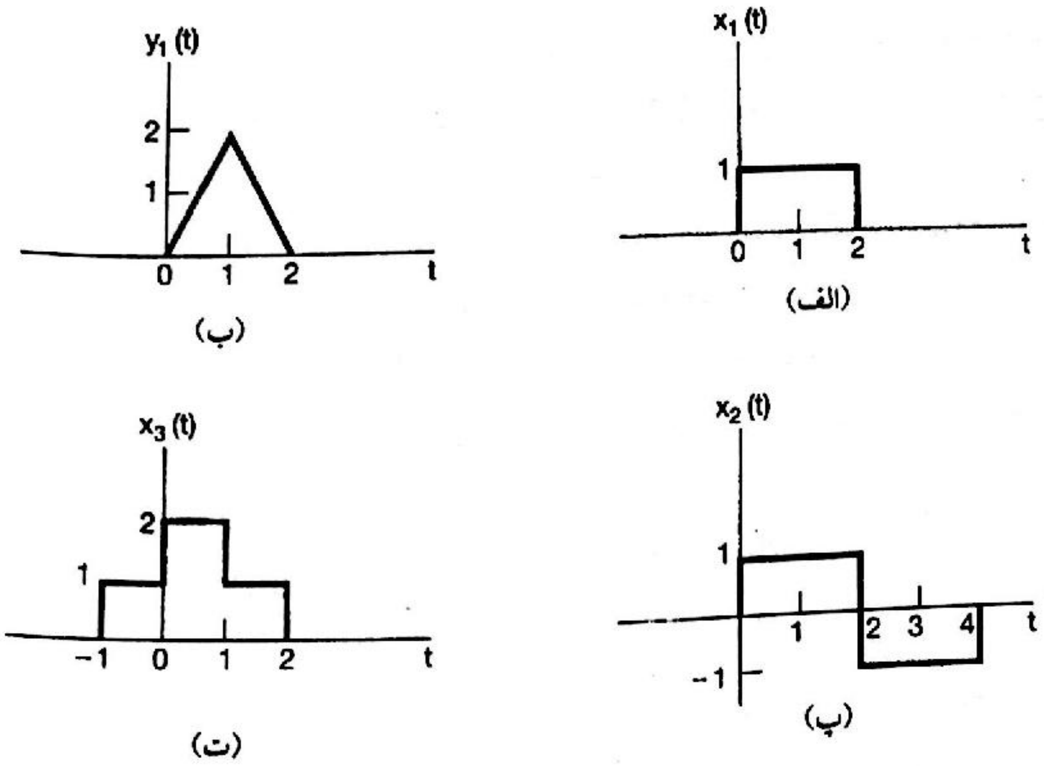
(ذ) $y[n] = \begin{cases} x[n+1], & n \geq 0 \\ x[n], & n \leq -1 \end{cases}$

(ر) $y(t) = x(2t)$

(ز) $y[n] = x[2n]$

(ژ) $y[n] = \begin{cases} x[n/2], & \text{زوج } n \\ 0, & \text{فرد } n \end{cases}$

۱-۳۱ در این مسأله یکی از مهمترین نتایج خواص خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان تشریح می‌شود. مشخصاً وقتی که پاسخ سیستم خطی یا سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) را به یک ورودی یا پاسخهای به چند ورودی را بدانیم، می‌توانیم پاسخهای بسیاری از سیگنال‌های ورودی دیگر را مستقیماً محاسبه کنیم. قسمت عمده‌ای از باقیماندهٔ این کتاب، با بهره گیری کاملی از این واقعیت، به



شکل م۱-۳۱

گسترش نتایج و فنون تحلیل و ترکیب سیستم‌های LTI می‌پردازد.

(الف) یک سیستم LTI را در نظر بگیرید که پاسخ آن به سیگنال $x_1(t)$ در شکل م۱-۳۱ (الف) برابر با سیگنال $y_1(t)$ ترسیم شده در شکل م۱-۳۱ (ب) است. پاسخ سیستم را به ورودی $x_2(t)$ که در شکل م۱-۳۱ (پ) داده شده است، تعیین کرده و به دقت رسم کنید.

(ب) پاسخ سیستم مطرح شده در قسمت (الف) را به ورودی $x_3(t)$ که در شکل م۱-۳۱ (ت) داده شده است، تعیین و رسم کنید.

مسائل پیشرفته

۱-۳۲ فرض کنید $x(t)$ سیگنال زمان ـ پیوسته‌ای باشد و فرض کنید:

$$y_1(t) = x(2t) \quad \text{و} \quad y_2(t) = x(t/2) \, .$$

سیگنال $y_1(t)$ نشان دهندهٔ یک نسخهٔ سرعت یافته از $x(t)$ است، بدین‌معنا که مدت زمان سیگنال به نصف تقلیل یافته است. به طور مشابه، $y_2(t)$ نشان دهندهٔ یک نسخهٔ کُند شده از $x(t)$ است، بدین‌معنا که مدت زمان سیگنال دوبرابر شده است. عبارتهای زیر را درنظر بگیرید:

(۱) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_1(t)$ متناوب است.

(۲) اگر $y_1(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ متناوب است.

(۳) اگر $x(t)$ متناوب باشد، آنگاه $y_2(t)$ متناوب است.

(۴) اگر $y_2(t)$ متناوب باشد، آنگاه $x(t)$ متناوب است.

در هر مورد تعیین کنید که آیا عبارت داده شده درست است یا خیر، واگر عبارت درست بود، رابطهٔ بین دوره‌های تناوب اصلی دو سیگنال مورد نظر در آن عبارت را تعیین کنید. اگر عبارت درست نبود، یک مثال نقض برای آن ارائه دهید.

۱-۳۳ فرض کنید $x[n]$ سیگنال زمان ـ گسسته‌ای باشد، و فرض کنید:

$$y_1[n] = x[2n] \quad \text{و} \quad y_2[n] = \begin{cases} x[n/2], & n \text{ زوج} \\ 0, & n \text{ فرد} \end{cases}$$

از یک نظر، سیگنال‌های $y_1[n]$ و $y_2[n]$، به ترتیب، نشان دهندهٔ نسخه‌های سرعت یافته و کند شدهٔ $x[n]$ هستند. امّا باید متذکر شد که مفاهیم سرعت یافتن و کُند شدن در زمان ـ گسسته نسبت به همتاهای زمان ـ پیوستهٔ آنها تفاوتهای ظریفی دارند. عبارتهای زیر را درنظر بگیرید:

(۱) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_1[n]$ متناوب است.

(۲) اگر $y_1[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ متناوب است.

(۳) اگر $x[n]$ متناوب باشد، آنگاه $y_2[n]$ متناوب است.

(۴) اگر $y_2[n]$ متناوب باشد، آنگاه $x[n]$ متناوب است.

در هر مورد تعیین کنید که آیا عبارت داده شده درست است یا خیر، و اگر عبارت درست بود، رابطهٔ بین دوره‌های تناوب اصلی دو سیگنال مورد نظر در آن عبارت را تعیین کنید. اگر عبارت درست نبود، یک مثال نقض برای آن ارائه دهید.

۱-۳۴ در این مسأله چند خاصیت سیگنال‌های زوج و فرد بررسی می‌شود.

(الف) نشان دهید که اگر $x[n]$ یک سیگنال فرد باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]=0$$

(ب) نشان دهید که اگر $x_1[n]$ سیگنالی فرد و $x_2[n]$ سیگنالی زوج باشد، آنگاه $x_1[n]x_2[n]$ سیگنالی فرد است.

(پ) فرض کنید $x[n]$ سیگنال دلخواهی با جزء‌های زوج و فرد به صورت زیر باشد:

$$x_e[n] = \mathcal{E}v\{x[n]\}$$

و

$$x_o[n] = \mathcal{O}d\{x[n]\}.$$

نشان دهید که:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n].$$

(ت) اگرچه قسمتهای (الف) تا (پ) برحسب سیگنال‌های زمان-گسسته بیان شده‌اند، خواص مشابهی نیز در زمان پیوسته برقرار است. برای اثبات این امر نشان دهید که:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x_e^2(t)\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} x_o^2(t)\,dt,$$

که در آن $x_e(t)$ و $x_o(t)$ به ترتیب جزء‌های زوج و فرد $x(t)$ هستند.

۱-۳۵ سیگنال نمایی زمان-گسستهٔ متناوب را در نظر بگیرید:

$$x[n] = e^{jm(2\pi/N)n}.$$

نشان دهید که دورهٔ تناوب اصلی این سیگنال برابر است با:

$$N_0 = N/\gcd(m, N),$$

که در آن $\gcd(m, N)$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک m و N است ـــ یعنی بزرگترین عدد صحیحی که هم m و هم N بر آن بخش‌پذیر هستند. به عنوان مثال داریم:

$$\gcd(2, 3) = 1, \gcd(2, 4) = 2, \gcd(8, 12) = 4.$$

توجه کنید که اگر m و N عامل مشترکی نداشته باشند، آنگاه $N_0 = N$ است.

۱-۳۶ فرض کنید $x(t)$ سیگنال نمایی مختلط زمان- پیوسته با فرکانس اصلی $\omega_\circ$ و دورهٔ تناوب اصلی $T_\circ = 2\pi/\omega_\circ$ باشد:

$$x(t) = e^{j\omega_\circ t}.$$

سیگنال زمان- گسستهٔ حاصل از نمونه‌برداری $x(t)$ به فواصل یکسان را در نظر بگیرید ـــ یعنی:

$$x[n] = x(nT) = e^{j\omega_\circ nT}.$$

T برابر دوره نمونه برداری است

(الف) نشان دهید که $x[n]$ متناوب است اگر و فقط اگر $T/T_\circ$ عددی گویا باشد ـــ یعنی اگر و فقط اگر مضربی از فاصلهٔ نمونه‌برداری دقیقاً مساوی مضربی از دورهٔ تناوب $x(t)$ باشد.

(ب) فرض کنید که $x[n]$ متناوب است ـــ یعنی این که:

$$\frac{T}{T_\circ} = \frac{p}{q}, \qquad \text{(م ۱-۳۶-۱)}$$

که در آن p و q اعدادی صحیح هستند. دورهٔ تناوب اصلی و فرکانس اصلی $x[n]$ چیست؟ فرکانس اصلی را به‌صورت کسری از $\omega_\circ T$ بیان کنید.

(پ) بار دیگر با فرض این که $T/T_\circ$ در معادلهٔ (م ۱-۳۶-۱) صدق می‌کند، دقیقاً تعیین کنید که چند دورهٔ تناوب $x(t)$ لازم است تا آن که نمونه‌هایی که یک دورهٔ تناوب $x[n]$ را تشکیل می‌دهند، به‌دست آید.

۱-۳۷ همبستگی بین دو سیگنال، یک مفهوم مهم در بسیاری از کاربردهای مخابراتی است. در مسائل انتهای فصل ۲ دربارهٔ این موضوع مطالب بیشتری برای گفتن خواهیم داشت و اشارتی به چگونگی استفاده از آن در عمل خواهیم کرد. در اینجا به مقدمهٔ مختصری بر توابع همبستگی و برخی از خواص آنها اکتفا می‌کنیم.

فرض کنید $x(t)$ و $y(t)$ دو سیگنال باشند، آنگاه تابع همبستگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)\, y(\tau)\, d\tau$$

تابع $\phi_{xx}(t)$ را معمولاً تابع خود همبستگی سیگنال $x(t)$ می‌نامند. در حالی که $\phi_{xy}(t)$ را اغلب تابع همبستگی متقابل می‌نامند.

(الف) رابطهٔ بین $\phi_{xy}(t)$ و $\phi_{yx}(t)$ چیست؟

(ب) جزء فرد $\phi_{xx}(t)$ را محاسبه کنید.

(پ) فرض کنید که $y(t) = x(t+T)$ باشد. $\phi_{xy}(t)$ و $\phi_{yy}(t)$ را برحسب $\phi_{xx}(t)$ بیان کنید.

۱-۳۸ در این مسأله بعضی از ویژگیهای تابع ضربهٔ واحد بررسی می‌شود.

(الف) نشان دهید که:

$$\delta(2t) = \frac{1}{2}\delta(t).$$

راهنمایی : $\delta_\Delta(t)$ را بررسی کنید (شکل ۱-۳۴ را ببینید).

(ب) در بخش ۱-۴ ضربهٔ واحد زمان - پیوسته را به‌صورت حد سیگنال $\delta_\Delta(t)$ تعریف کر
به‌طور دقیقتر، چند ویژگی $\delta(t)$ را با بررسی خواص متناظر $\delta_\Delta(t)$ تعریف کردیم. به ع
مثال، چون سیگنال

$$u_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta_\Delta(\tau)\, d\tau$$

به پلهٔ واحد همگرا می‌شود،

$$u(t) = \lim_{\Delta \to 0} u_\Delta(t)\,, \qquad \text{(م ۱-۳۸-۱)}$$

توانستیم $\delta(t)$ را از طریق معادلهٔ زیر:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau,$$

یا با تلقی $\delta(t)$ به عنوان مشتق رسمی $u(t)$، تعبیر کنیم.

این نوع بحث مهم است، زیرا که در واقع سعی داریم $\delta(t)$ را بجای مشخص کرد
مقادیرش برای هر t، که امری ناممکن است، از طریق خواص آن تعریف کنیم. در فصل ؛
توصیف بسیار ساده‌ای از رفتار ضربهٔ واحد ارائه می‌شود که در بررسی سیستم‌های خطی
تغییرناپذیر با زمان فوق‌العاده مفید است. امّا در حال حاضر فقط بر تشریح این مطلب متمرکز
می‌شویم که مفهوم مهم در استفاده از ضربهٔ واحد، درک چگونگی رفتار آن است. بدین
منظور، شش سیگنال ترسیم شده در شکل م ۱-۳۸ را در نظر بگیرید. نشان دهید که هر یک
از این سیگنال‌ها وقتی $\Delta \longrightarrow 0$ میل کند، "همانند یک ضربه رفتار می‌کنند"، از این نظر که
اگر بگیریم :

$$u^i_\Delta(t) = \int_{-\infty}^{t} r^i_\Delta(\tau)\, d\tau\,,$$

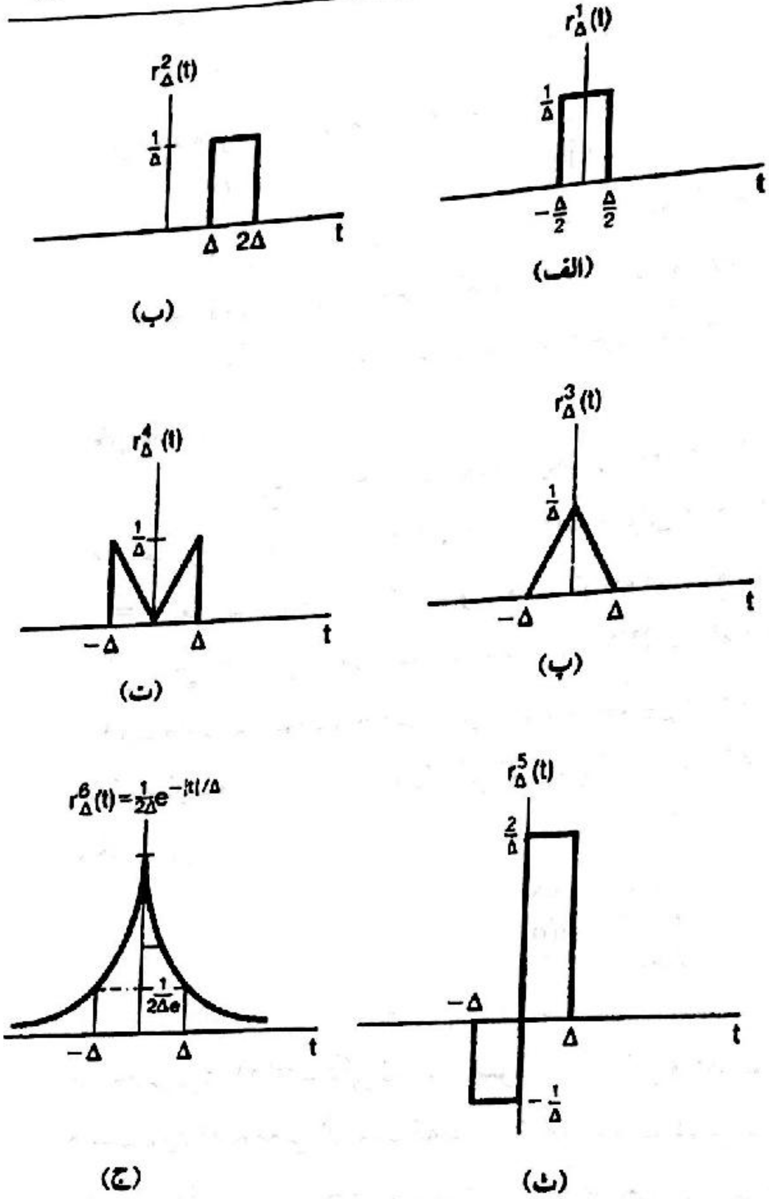
آنگاه داریم :

$$\lim_{\Delta \to 0} u^i_\Delta(t) = u(t)\,.$$

در هر حالت سیگنال $u^i_\Delta(t)$ را به دقت رسم کرده و مدرج کنید. توجه کنید که :

$$r^2_\Delta(0) = r^4_\Delta(0) = 0, \quad \text{برای هر } \Delta$$

بنابراین، این که فقط $\delta(t)$ را برای $t \neq 0$ مساوی صفر و برای $t = 0$ مساوی بینهایت
تعریف کرده یا تصور کنیم، کافی نیست. بلکه این خواصی نظیر معادلهٔ (م ۱-۳۸-۱) است که
ضربه را تعریف می‌کند. در بخش ۲-۵ دسته‌ای کلی از سیگنال‌ها موسوم به توابع ویژه را



شکل م۱-۳۸

تعریف خواهیم کرد که به ضربهٔ واحد مربوط می‌شوند و این توابع نیز برحسب خواصشان و نه مقادیرشان تعریف می‌شوند.

۱-۳۹ نقشی که به وسیلهٔ $u(t)$ ، $\delta(t)$ ، و سایر توابع ویژه در مطالعهٔ سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان ایفا می‌شود، عبارت از ایده‌آل‌سازی یک پدیدهٔ فیزیکی است و چنان که خواهیم دید استفاده از این ایده‌آل‌سازیها این امکان را به ما می‌دهد که نمایش فوق‌العاده مهم و بسیار ساده‌ای را از چنین سیستم‌هایی به دست آوریم. امّا در استفاده از توابع ویژه، لازم است که دقت به خرج داد. به‌خصوص باید به خاطر داشت که این توابع یک ایده‌آل‌سازی هستند و بنابراین هرگاه محاسبه‌ای با استفاده از آنها انجام گیرد، به‌طور ضمنی فرض بر این است که این محاسبه نشان دهندهٔ توصیف دقیقی از رفتار سیگنال‌هایی است که قرار است ایده‌آل سازی شوند. برای تشریح این موضوع، معادلهٔ زیر را در نظر بگیرید :

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) .$$ (م ۱-۳۹-۱)

این معادله بر مبنای این ملاحظه است که :

$$x(t)\delta_\Delta(t) \approx x(0)\delta_\Delta(t) .$$ (م ۱-۳۹-۲)

با گرفتن حد این رابطه، رابطهٔ ایده‌آل‌سازی شده در معادلهٔ (م ۱-۳۹-۲) حاصل می‌شود. امّا، بررسی دقیقتر نحوهٔ بدست آوردن معادلهٔ (م ۱-۳۹-۲) نشان می‌دهد که این معادله فقط وقتی معنی دارد که $x(t)$ در $t = 0$ پیوسته باشد. در غیر این صورت، رابطهٔ $x(t) \approx x(0)$ برای t کوچک برقرار نخواهد بود.

برای واضح‌تر ساختن این نکته، سیگنال پلهٔ واحد $u(t)$ را در نظر بگیرید. از معادلهٔ (۱-۷۰) به خاطر آورید که برای $u(t) = 0 , t < 0$ و برای $u(t) = 1 , t > 0$ است، اما مقدار آن در $t = 0$ تعریف نشده است. [به عنوان مثال، توجه کنید که به‌ازای هر Δ، $u_\Delta(0) = 0$ است. در حالی که $u^1{}_\Delta(0) = \frac{1}{2}$ می‌باشد (بنابه مسألهٔ ۱-۳۸(ب).] مادامی که محاسبات انجام شده با استفاده از $u(t)$ متکی بر انتخاب خاصی برای $u(0)$ نباشد، این واقعیت که $u(0)$ تعریف نشده است چندان مشکل‌ساز نخواهد بود. برای مثال اگر $f(t)$ سیگنالی باشد که در $t = 0$ پیوسته است، آنگاه مقدار انتگرال زیر :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma)u(\sigma)\,d\sigma$$

به انتخابی برای $u(0)$ بستگی ندارد. از سویی دیگر، این واقعیت که $u(0)$ تعریف نشده، از این لحاظ اهمیت دارد که به معنی آن است که برخی از محاسبات شامل توابع ویژه تعریف نشده‌اند. گیریم که سعی کنیم مقداری برای حاصلضرب $u(t)\delta(t)$ تعریف کنیم. برای آن که ببینید این کمیت را نمی‌توان تعریف کرد، نشان دهید که :

$$\lim_{\Delta\to 0} [u_\Delta(t)\,\delta(t)] = 0,$$

امّا :

$$\lim_{\Delta\to 0} [u_\Delta(t)\,\delta_\Delta(t)] = \frac{1}{2}\,\delta(t) .$$

در حالت کلی، مادامی که دو سیگنال شامل ویژگیهایی (از قبیل ناپیوستگی‌ها، ضربه‌ها، یا دیگر ویژگیهای مطرح شده در بخش ۲-۵) که محل آنها بر هم منطبق است، نباشند می‌توان بدون هیچ مشکلی حاصلضرب آن دو سیگنال را تعریف کرد. اما وقتی که محل ویژگیها بر هم منطبق باشد، حاصلضرب تعریف نشده است. به عنوان مثال، نشان دهید که سیگنال زیر :

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau$$

مشـابه $u(t)$است، یـعنی بـرای $t > ۰$ بـرابـر صـفر است، بـرای $t < ۰$ مـساوی یک است، و برای $t = ۰$ تعریف نشده است.

۱-۴۰ (الف) نشان دهید که اگر یک سیستم دارای هر کدام از دو خاصیت جمع‌پذیری یا همگنی باشد، دارای این خاصیت است که اگر ورودی متحد با صفر باشد، آنگاه خروجی نیز متحد با صفر است.

(ب) سیستمی (در زمان- پیوسته یا زمان- گسسته) چنان تعیین کنید که نه جمع‌پذیر و نه همگن بوده امّا در عین حال اگر ورودی متحد با صفر باشد، دارای خروجی صفر باشد.

(پ) آیا از قسمت (الف) می‌توان نتیجه گرفت که اگر ورودی به یک سیستم خطی در فاصلهٔ زمانهای t_1 و t_2 در زمان-پیوسته یا در فاصلهٔ زمانهای n_1 و n_2 در زمان-گسسته برابر صفر باشد آنگاه خروجی نیز باید در این فاصله زمانها برابر صفر باشد؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱-۴۱ سیستم S را با رابطهٔ زیر بین ورودی $x[n]$ و خروجی $y[n]$ در نظر بگیرید:

$$y[n] = x[n]\{g[n] + g[n-۱]\} .$$

(الف) اگر برای تمام n ها، $g[n] = ۱$ باشد، نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان است.

(ب) اگر $g[n] = n$ باشد، نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان نیست.

(پ) اگر $g[n] = ۱ + (-۱)^n$ باشد نشان دهید که S تغییرناپذیر با زمان است.

۱-۴۲ (الف) آیا عبارت زیر درست یا نادرست است؟

بهم پیوستن سری دو سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان خود یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان است.

پاسخ خود را توجیه کنید.

(ب) آیا عبارت زیر درست یا نادرست است؟

بهم پیوستن سری دو سیستم غیرخطی خود غیرخطی است.

پاسخ خود را توجیه کنید.

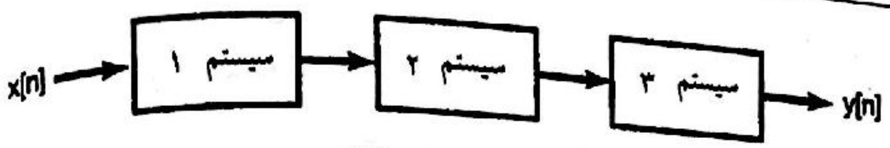
(پ) سه سیستم با روابط ورودی- خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{سیستم ۱}: \quad y[n] = \begin{cases} x[n/۲], & n \text{ زوج} \\ ۰, & n \text{ فرد} \end{cases},$$

$$\text{سیستم ۲}: \quad y[n] = x[n] + \frac{۱}{۲}x[n-۱] + \frac{۱}{۴}x[n-۲],$$

$$\text{سیستم ۳}: \quad y[n] = x[۲n].$$

فرض کنید همان‌طور که در شکل م۱-۴۲ نشان داده شده است، این سیستم‌ها به‌طور سری به هم متصل شده باشند. رابطهٔ ورودی- خروجی را برای کل سیستم بهم پیوسته بیابید. آیا این سیستم خطی است؟ آیا تغییرناپذیر با زمان است؟



شکل م۱ - ۴۲

۱-۴۳ (الف) سیستمی تغییرناپذیر با زمان را با ورودی $x(t)$ و خروجی $y(t)$ در نظر بگیرید. نشان دهید که اگر $x(t)$ متناوب با دورهٔ تناوب T باشد، آنگاه $y(t)$ نیز چنین است. نشان دهید که نتیجهٔ مشابهی نیز در زمان-گسسته برقرار است.

(ب) مثالی از سیستم تغییرناپذیر با زمان و یک سیگنال ورودی نامتناوب $x(t)$ چنان ارائه دهید که خروجی متناظر، $y(t)$، متناوب باشد.

۱-۴۴ (الف) نشان دهید که علّیت برای سیستم خطی زمان-پیوسته معادل با عبارت زیر است:

برای هر زمان t_0 و هر ورودی $x(t)$ که برای $t < t_0$ ، $x(t) = 0$ باشد، خروجی متناظر، $y(t)$، نیز باید برای $t < t_0$ برابر صفر باشد.

می‌توان عبارت مشابهی را نیز برای سیستم خطی زمان-گسسته ارائه داد.

(ب) یک سیستم غیرخطی چنان بیابید که در شرط فوق صدق کرده اما علّی نباشد.

(پ) یک سیستم غیرخطی چنان بیابید که علّی بوده اما در شرط فوق صدق نکند.

(ت) نشان دهید که معکوس‌پذیری برای سیستم خطی زمان-گسسته معادل با عبارت زیر است: تنها ورودی‌ای که $y[n] = 0$ برای تمام n ها تولید می‌کند ، $x[n] = 0$ برای تمام n ها است.

عبارت مشابهی نیز برای سیستم خطی زمان-پیوسته صادق است.

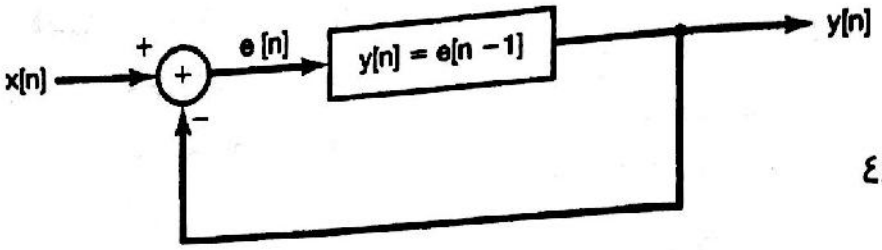
(ث) یک سیستم غیرخطی چنان بیابید که در شرط قسمت (ت) صدق کرده امّا معکوس‌پذیر نباشد.

۱-۴۵ در مسألهٔ ۱-۳۷ مفهوم توابع همبستگی معرفی شد. در عمل اغلب مهم است که تابع همبستگی $\phi_{hx}(t)$ محاسبه شود که در آن $h(t)$ سیگنال مفروض معینی بوده اما $x(t)$ می‌تواند هر سیگنالی از گستره‌ای متنوع باشد. در این حالت آن‌چه که باید انجام شود عبارت از طراحی سیستم S با ورودی $x(t)$ و خروجی $\phi_{hx}(t)$ است.

(الف) آیا S خطی است ؟ آیا S تغییرناپذیر با زمان است ؟ آیا S علّی است ؟ پاسخهای خود را توجیه کنید.

(ب) اگر بجای خروجی $\phi_{hx}(t)$ ، $\phi_{xh}(t)$ را به عنوان خروجی در نظر بگیریم، آیا هیچکدام از پاسخهای شما در قسمت (الف) تغییر می‌کند ؟

۱-۴۶ سیستم پس‌خور شکل م۱-۴۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید که برای $n < 0$ ، $y[n] = 0$ است.



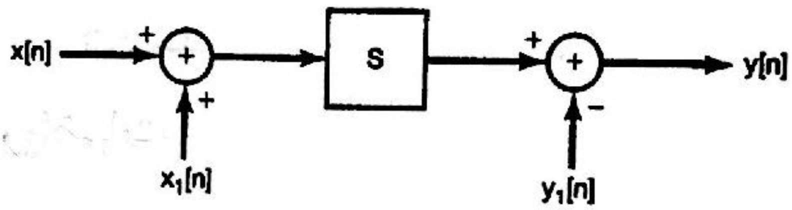
شکل م۱-۴۶

(الف) خروجی را به‌ازای $x[n] = \delta[n]$ رسم کنید.

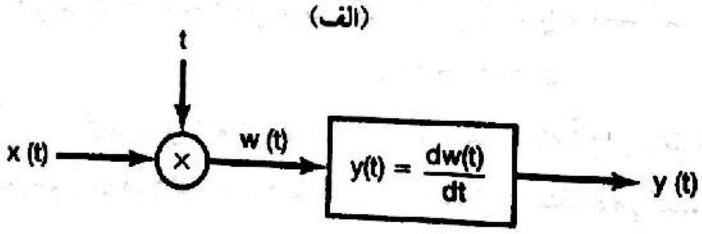
(ب) خروجی را به‌ازای $x[n] = u[n]$ رسم کنید.

۱-۴۷ **(الف)** فرض کنید S نشان‌دهندهٔ یک سیستم خطی نموی باشد و فرض کنید $x_1[n]$ سیگنال ورودی دلخواهی به S با خروجی متناظر $y_1[n]$ باشد. سیستم نشان داده شده در شکل م۱-۴۷ (الف) را در نظر بگیرید. نشان دهید که این سیستم خطی است و در واقع رابطهٔ ورودی-خروجی کل بین $x[n]$ و $y[n]$ به انتخاب خاصی برای $x_1[n]$ بستگی ندارد.

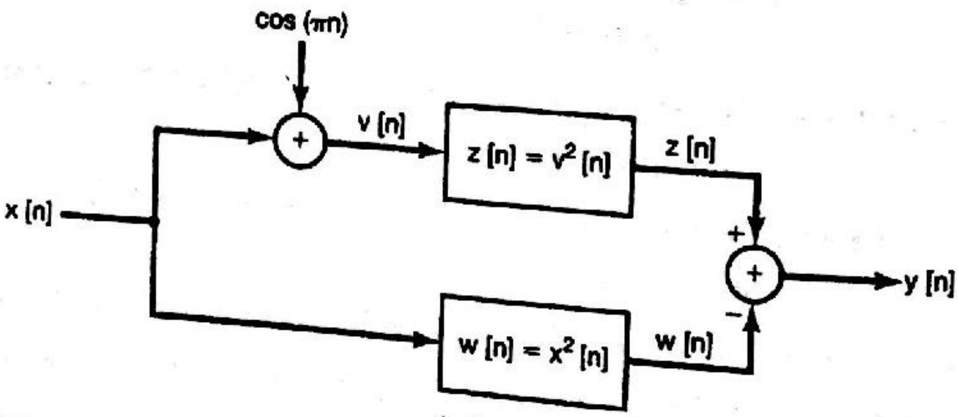
(ب) از نتیجهٔ قسمت (الف) استفاده کرده و نشان دهید که S را می‌توان به‌صورت داده شده در شکل ۱-۴۸ نمایش داد.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل م۱-۴۷

(پ) کدام یک از سیستم‌های زیر خطی نموی‌اند ؟ پاسخهای خود را توجیه کنید و اگر سیستمی خطی نموی است، سیستم خطی L و پاسخ ورودی- صفر $y_\circ[n]$ یا $y_\circ(t)$ را برای نمایش سیستم به‌صورت داده شده در شکل ۱-۴۸ مشخص کنید.

(۱)
$$y[n] = n + x[n] + ۲x[n+۴]$$

(۲)
$$y[n] = \begin{cases} n/۲, & n \text{ زوج} \\ (n-۱)/۲ + \sum_{k=-\infty}^{(n-1)/۲} x[k], & n \text{ فرد} \end{cases}$$

(۳)
$$y[n] = \begin{cases} x[n]-x[n-۱]+۳, & x[\circ] \geq \circ \text{ اگر} \\ x[n]-x[n-۱]-۳, & x[\circ] < \circ \text{ اگر} \end{cases}$$

(۴) سیستم نشان داده شده در شکل م۱-۴۷ (ب).

(۵) سیستم نشان داده شده در شکل م۱-۴۷ (پ).

(ت) فرض کنید که یک سیستم خطی نموی خاص دارای نمایشی به‌صورت شکل ۱-۴۸ است، که در آن L نشان دهندهٔ سیستم خطی و $y_\circ[n]$ پاسخ ورودی- صفر می‌باشد. نشان دهیدکه S تغییرناپذیر با زمان است اگر و فقط اگر L یک سیستم تغییرناپذیر با زمان بوده و $y_\circ[n]$ ثابت باشد.

مرور ریاضیات

عدد مختلط z را می‌توان به چند طریق بیان کرد. شکل کارتزین یا مستطیلی برای z به‌صورت زیر است:

$$z = x + jy,$$

که در آن $j = \sqrt{-۱}$ بوده و x و y اعدادی حقیقی هستند که آنها را به‌ترتیب جزء حقیقی و جزء موهومی z می‌نامند. همان‌طور که قبلاً اشاره کردیم، اغلب از نماد زیر استفاده می‌کنیم :

$$x = \mathcal{R}e\{z\}, \quad y = \mathcal{I}m\{z\}.$$

عدد مختلط z را همچنین می‌توان به‌صورت زیر به شکل قطبی بیان کرد :

$$z = re^{j\theta},$$

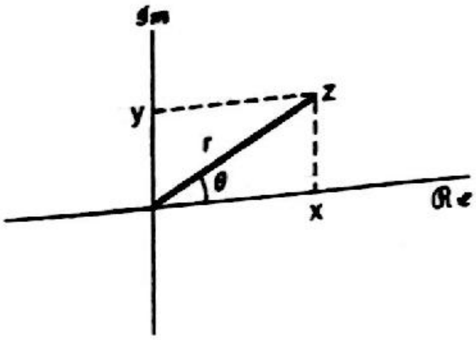
که در آن $r > \circ$ اندازهٔ z و θ زاویه یا فاز z می‌باشند. این کمیتها اغلب به‌صورت زیر نوشته می‌شوند :

$$r = |z|, \quad \theta = \measuredangle z.$$

رابطهٔ بین این دو نمایش اعداد مختلط را می‌توان با استفاده از رابطهٔ اویلر ،

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta,$$

و یا با ترسیم z در صفحهٔ مختلط چنان که در شکل م۱-۴۸ نشان داده شده است و در آن محورهای مختصات $\mathcal{R}e\{z\}$ در امتداد محور افقی و $\mathcal{I}m\{z\}$ در امتداد محور عمودی هستند، تعیین کرد. در این نمایش ترسیمی ، x و y مختصات کارتزین z بوده ، و r و θ مختصات قطبی آن می‌باشند.



شکل م۱-۴۸

۱-۴۸ فرض کنید $z_\circ$ یک عدد مختلط با مختصات قطبی $(r_\circ, \theta_\circ)$ و مختصات کارتزین $(x_\circ, y_\circ)$ باشد. برای مختصات کارتزین اعداد مختلط زیر، عبارتهای را برحسب $x_\circ$ و $y_\circ$ تعیین کنید. به‌ازای $r_\circ = ۲$ و $\theta_\circ = \pi/۴$ و همچنین به‌ازای $r_\circ = ۲$ و $\theta_\circ = \pi/۲$، نقاط $z_\circ$، $z_۱$، $z_۲$، $z_۳$، $z_۴$ و $z_۵$ را در صفحهٔ مختلط رسم کنید. در ترسیمهای خود جزءهای حقیقی و موهومی هر نقطه را نشان دهید.

(الف) $z_۱ = r_\circ e^{-j\theta_\circ}$ (ب) $z_۲ = r_\circ$ (پ) $z_۳ = r_\circ e^{j(\theta_\circ + \pi)}$

(ت) $z_۴ = r_\circ e^{j(-\theta_\circ + \pi)}$ (ث) $z_۵ = r_\circ e^{j(\theta_\circ + ۲\pi)}$

۱-۴۹ هر یک از اعداد مختلط زیر را به‌صورت قطبی بیان کنید و با نشان دادن اندازه و زاویهٔ هر عدد، آنها را در صفحهٔ مختلط مشخص نمایید.

(الف) $۱ + j\sqrt{۳}$ (ب) -۵ (پ) $-۵ - ۵j$

(ت) $۳ + ۴j$ (ث) $(۱ - j\sqrt{۳})^۳$ (ج) $(۱ + j)^۵$

(چ) $(\sqrt{۳} + j^۳)(۱ - j)$ (ح) $\dfrac{۲ - j(۶/\sqrt{۳})}{۲ + j(۶/\sqrt{۳})}$ (خ) $\dfrac{۱ + j\sqrt{۳}}{\sqrt{۳} + j}$

(د) $j(۱ + j)e^{j\pi/۶}$ (ذ) $(\sqrt{۳} + j)۲\sqrt{۲}e^{-j\pi/۴}$ (ر) $\dfrac{e^{j\pi/۳} - ۱}{۱ + j\sqrt{۳}}$

۱-۵۰ (الف) با استفاده از رابطهٔ اویلر یا شکل م۱-۴۸، عبارتهایی برای x و y برحسب r و θ تعیین کنید.

(ب) عبارتهای را برای r و θ برحسب x و y تعیین کنید.

(پ) اگر فقط r و $\tan\theta$ داده شده باشند، آیا می‌توان x و y را به‌طور یکتا تعیین کرد؟ پاسخ خود را توجیه کنید.

۱-۵۱ با استفاده از رابطهٔ اویلر، روابط زیر را بدست آورید:

(الف) $\cos\theta = \frac{۱}{۲}(e^{j\theta} + e^{-j\theta})$

ب) $\sin\theta = \frac{1}{2j}(e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

پ) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$

ت) $(\sin\theta)(\sin\phi) = \frac{1}{2}\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{2}\cos(\theta + \phi)$

ث) $\sin(\theta + \phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$

۱–۵۲ فرض کنید z نشان دهندهٔ متغیر مختلط باشد، یعنی:

$$z = x + jy = re^{j\theta}.$$

مزدوج مختلط z برابر است با:

$$z^* = x - jy = re^{-j\theta}.$$

هر یک از روابط زیر را که در آنها z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی هستند، ثابت کنید:

(الف) $zz^* = r^2$

(ب) $\frac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

(پ) $z + z^* = 2\,\mathcal{R}e\{z\}$

(ت) $z - z^* = 2\,\mathcal{I}m\{z\}$

(ث) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

(ج) $(az_1z_2)^* = az_1^*z_2^*$ که در آن a عددی حقیقی است.

(چ) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$

(ح) $\mathcal{R}e\left\{\frac{z_1}{z_2}\right\} = \frac{1}{2}\left[\frac{z_1z_2^* + z_1^*z_2}{z_2z_2^*}\right]$

۱–۵۳ روابط زیر را که در آنها z، z_1 و z_2 اعداد مختلط دلخواهی هستند، ثابت کنید:

(الف) $(e^z)^* = e^{z^*}$

(ب) $z_1z_2^* + z_1^*z_2 = 2\,\mathcal{R}e\{z_1z_2^*\} = 2\,\mathcal{R}e\{z_1^*z_2\}$

(پ) $|z| = |z^*|$

(ت) $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

(ث) $\mathcal{R}e\{z\} \le |z|$, $\mathcal{I}m\{z\} \le |z|$

(ج) $|z_1z_2^* + z_1^*z_2| \le 2|z_1z_2|$

(چ) $(|z_1| - |z_2|)^2 \le |z_1 + z_2|^2 \le (|z_1| + |z_2|)^2$

۱–۵۴ روابطی که در این مسأله مطرح می‌شوند، در سراسر کتاب بارها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

(الف) درستی عبارت زیر را ثابت کنید :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}, & \text{برای هر عدد مختلط } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

این رابطه را اغلب فرمول مجموع پایاندار می‌نامند.

(ب) نشان دهید که اگر $|\alpha| < 1$ باشد ، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} .$$

این رابطه را اغلب فرمول مجموع بی‌پایان می‌نامند.

(پ) همچنین نشان دهید که اگر $|\alpha| < 1$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2} .$$

(ت) با فرض این که $|\alpha| < 1$ است ، عبارت زیر را محاسبه کنید:

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n .$$

۱-۵۵ با استفاده از نتایج مسألهٔ ۱-۵۴، هر یک از مجموعهای زیر را محاسبه کرده و پاسخ خود را به شکل کارتزین (مستطیلی) بیان کنید :

(الف) $\sum_{n=0}^{9} e^{j\pi/2}$ **(ب)** $\sum_{n=-2}^{7} e^{j\pi n/2}$

(پ) $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$ **(ت)** $\sum_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{2})^n e^{j\pi n/2}$

(ث) $\sum_{n=0}^{9} \cos(\frac{\pi}{2} n)$ **(ج)** $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n \cos(\frac{\pi}{2} n)$

۱-۵۶ هر یک از انتگرال‌های زیر را محاسبه کرده و پاسخ خود را به شکل کارتزین (مستطیلی) بیان کنید :

(الف) $\int_0^4 e^{j\pi t/2} dt$ **(ب)** $\int_0^6 e^{j\pi t/2} dt$

(پ) $\int_2^8 e^{j\pi t/2} dt$ **(ت)** $\int_0^{\infty} e^{-(1+j)t} dt$

(ث) $\int_0^{\infty} e^{-t}\cos(t)\, dt$ **(ج)** $\int_0^{\infty} e^{-2t}\sin(3t)\, dt$